FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 13

1. El cometa choca plásticamente con el planetoide en su perihelio, $r_p = R$. Como no hay fuerzas tangenciales, se conserva el momentum lineal, el cual es puramente tangencial en el perihelio (y afelio):

$$F_\theta = 0 \Rightarrow p_\theta = cte \Rightarrow p_i = p_f$$

Llamando v_o a la velocidad orbital del planetoide, v_p a la velocidad del cometa en el perihelio y v_f a la velocidad final del conjunto planetoide-cometa, se tiene de la conservación del momentum lineal:

$$Mv_o + mv_p = (M+m)v_f$$

Para determinar v_f, necesitamos los valores de las velocidades iniciales del planetoide y del cometa. Para calcular la velocidad orbital del planetoide, utilizamos la dinámica del movimiento circunferencial uniforme (MCU) en combinación con la Ley de Gravitación Universal (LGU):

$$F_g = ma_c \Rightarrow -\frac{GM_SM}{R^2} = -\frac{Mv_o^2}{R} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

Para determinar la velocidad del cometa en su perihelio, usamos la conservación del momentum angular y de la energía, justo antes de la colisión:

$$l_c = mr_pv_p = mr_av_a \Rightarrow v_p = \frac{l_c}{mr_p} \quad , \quad v_a = \frac{l_c}{mr_a}$$

$$E_p = E_a \Rightarrow \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_Sm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GM_Sm}{r_a}$$

Reemplazando las velocidades en el perihelio y afelio:

$$\frac{l_c^2}{2mr_p^2} - \frac{GM_Sm}{r_p} = \frac{l_c^2}{2mr_a^2} - \frac{GM_Sm}{r_a} \Rightarrow \frac{l_c^2}{m^2}\left(\frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_p^2}\right) = 2GM_S\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)$$

$$\frac{l_c^2}{m^2}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p}\right) = 2GM_S\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \Rightarrow \frac{l_c^2}{m^2}\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p}\right) = 2GM_S$$

$$\frac{l_c^2}{m^2}\frac{r_a + r_p}{r_ar_p} = 2GM_S \Rightarrow \frac{l_c^2}{m^2} = 2GM_S\frac{r_ar_p}{r_a + r_p} \Rightarrow \frac{l_c}{m} = \sqrt{2GM_S\frac{r_ar_p}{r_a + r_p}}$$

Reemplazando los valores del perihelio $r_p = R$ y el afelio $r_a = 4R$, encontramos la rapidez del cometa:

$$\frac{l_c}{m} = \sqrt{\frac{8GM_SR}{5}} \Rightarrow v_p = \frac{8GM_S}{5R}$$

Sustituimos los valores de la rapidez inicial para el cometa y el planetoide en la expresión para v_f:

$$(M+m)v_f = M\sqrt{\frac{GM_S}{R}} + m\sqrt{\frac{8GM_S}{5R}}$$

Llamamos ahora al perihelio y afelio de la nueva órbita para el conjunto planetoide-cometa r'_p y r'_a. Se tiene que $r'_p = r_p = R$, ya que luego de la colisión el conjunto acelera, alejándose del Sol. Usamos este dato, más la conservación del momentum angular y la energía del sistema formado por el conjunto:

$$l_{pc} = (M+m)r_p v_f = (M+m)Rv_f$$

$$E_{p'} = E_{a'} \Rightarrow \frac{l_{pc}^2}{2(M+m)r_p'^2} - \frac{GM_S(M+m)}{r'_p} = \frac{l_{pc}^2}{2(M+m)r_a'^2} - \frac{GM_S(M+m)}{r'_a}$$

$$\frac{(M+m)^2R^2v_f^2}{2(M+m)R^2} - \frac{GM_S(M+m)}{R} = \frac{(M+m)^2R^2v_f^2}{2(M+m)r_a'^2} - \frac{GM_S(M+m)}{r'_a}$$

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{GM_S}{R} = \frac{R^2v_f^2}{2r_a'^2} - \frac{GM_S}{r'_a} \Rightarrow \left(v_f^2 - \frac{2GM_S}{R}\right)r_a'^2 + 2GM_S r'_a - R^2v_f^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en r'_a con la fórmula cuadrática:

$$r'_a = \frac{-2GM_S \pm \sqrt{(2GM_S)^2 - 4(v_f^2 - \frac{2GM_S}{R})(-R^2v_f^2)}}{2(v_f^2 - \frac{2GM_S}{R})}$$

$$r'_a = \frac{-GM_S \pm \sqrt{(GM_S)^2 + (v_f^2 - \frac{2GM_S}{R})R^2v_f^2}}{v_f^2 - \frac{2GM_S}{R}}$$

Notamos que el denominador es negativo, ya que la velocidad resultante del conjunto planetoide-cometa no puede alcanzar ni superar la velocidad de escape, al mantenerse en una órbita acotada:

$$v_f < v_e = \sqrt{\frac{2GM_S}{R}} \Rightarrow v_f^2 - \frac{2GM_S}{R} < 0$$

Debido a lo anterior, tomamos el signo menos en el numerador de la solución para el nuevo afelio, ya que este es la máxima distancia alcanzada en la nueva órbita elíptica (y negativo/negativo = positivo):

$$\boxed{r'_a = \frac{-GM_S - \sqrt{(GM_S)^2 + (v_f^2 - \frac{2GM_S}{R})R^2v_f^2}}{v_f^2 - \frac{2GM_S}{R}}}$$

<u>Observación:</u> el discriminante debe no negativo para que la solución sea real ¿qué condición se impone?

2. Consideramos que la fuerza percutiva F es efectuada perpendicularmente a la barra, durante un intervalo de tiempo t_p a una distancia L' del centro de masas de la barra (su mitad). Durante este instante, F es constante. Escribiendo la 2da Ley de Newton en sus variantes traslacional y rotacional:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = F\hat{i}$$
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = (-L'\hat{j}) \times (F\hat{i}) = L'F\hat{k}$$

Integrar en el tiempo es equivalente a multiplicar por el intervalo t_p durante el que se ejerce la fuerza percutiva, ya que esta es constante. Consideramos que la barra tiene momento de inercia I:

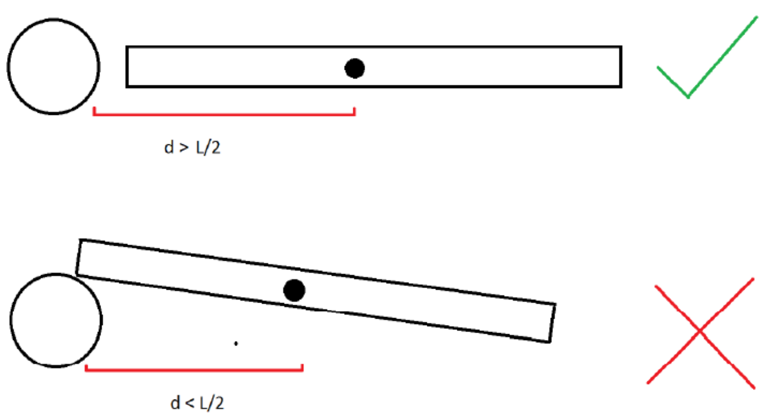
$$m\vec{v} = Ft_p\hat{i}$$
$$\vec{l} = I\vec{\omega} = L'Ft_p\hat{k}$$

De aquí podemos despejar la velocidad lineal v y angular ω adquiridas gracias al efecto de la fuerza:

$$\omega = \frac{L'Ft_p}{I}$$
$$v = \frac{Ft_p}{M}$$

Siendo éstas constantes durante el resto del movimiento, ya que la fuerza percutiva deja de actuar.

La barra chocará contra el poste cuando gire un ángulo $\theta = \pi/2$. La condición para que esto no ocurra es que, al haber girado este ángulo, el centro de masas se encuentre a $d \geq L/2$ (ver figura de abajo). El límite, y por lo tanto, la distancia mínima, se obtiene cuando $d = L/2$ al mismo tiempo que $\theta = \pi/2$



Otra forma de ver esto, es que t_d, el tiempo en que el centro de masas recorre una distancia $L/2$ tiene que ser menor que t_θ, el tiempo que tarda la barra en girar $\pi/2$. El límite se tiene cuando $t_d = t_\theta = t_c$:

$$\theta(t_c) = \frac{\pi}{2}$$
$$d(t_c) = \frac{L}{2}$$

Como las velocidades lineal y angular del sistema son constantes, multiplicamos por t_c, obteniendo:

$$\omega t_c = \frac{L' F t_p t_c}{I} = \frac{\pi}{2}$$
$$v t_c = \frac{F t_p t_c}{M} = \frac{L}{2}$$

Reordenando términos, se tiene que:

$$F t_p t_c = \frac{\pi I}{2L'} = \frac{ML}{2}$$

Reemplazando el momento de inercia de una barra uniforme girando en torno a su centro de masas:

$$\frac{\pi}{2L'} \frac{ML^2}{12} = \frac{ML}{2} \Rightarrow L' = \frac{\pi L}{12}$$

Aproximando $\pi \approx 3$, estimamos el máximo valor posible para L' tal que la barra no choque al poste:

$$\boxed{L' \approx \frac{3L}{12} = \frac{L}{4}}$$