Pauta Examen

Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliares: Jerónimo Herrera G. - Rodrigo Catalán B.
Ayudantes: Gerald Barnert S. - Diana Escobar C.

P1.-

i) Gracias a la 2da ley de Newton sabemos que

$$m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

Como conocemos la trayectoria de la partícula, debemos calcular su aceleración para obtener una expresión para la fuerza.

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(A_x \cos(\omega_x t)) = -A_x\omega_x^2 \cos(\omega_x t)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}(A_y \text{sen}(\omega_y t)) = -A_y\omega_y^2 \text{sen}(\omega_y t) \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

Lo que nos entrega la fuerza en función del tiempo:

$$\vec{F}(t) = m\vec{a} = -mA_x\omega_x^2\cos(\omega_x t)\hat{\imath} - mA_y\omega_y^2\text{sen}(\omega_y t)\hat{\jmath} \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

Introducimos de vuelta las expresiones para $x(t)$, $y(t)$:

$$\boxed{\vec{F}(x,y) = -m\omega_x^2 x\hat{\imath} - m\omega_y^2 y\hat{\jmath}} \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

Lo que corresponde a la fuerza en función de las coordenadas.

ii) Dado el punto de referencia $(x_0, y_0) = (0,0)$, podemos calcular el potencial

$$U(x,y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad ; \quad d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} \quad \textbf{(+2 pts)}$$

$$U(x,y) = m\omega_x^2 \int_0^x x dx + m\omega_y^2 \int_0^y y dy$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \quad \textbf{(+2 pts)}$$

P2.-

Escribimos posición y velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Evaluando en $t = 0$:

$$\vec{r}(0) = R\hat{j}$$
$$\vec{v}(0) = v_0\text{sen}(\pi/6)\hat{i} + v_0\text{cos}(\pi/6)\hat{j} = \frac{v_0}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}v_0}{2}\hat{j} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Usamos la conservación del momentum angular para encontrar $\dot{\theta}(r)$:

$$l = l_i \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = mr(0)^2\dot{\theta}(0) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{Rv_0}{2r^2} \quad \textbf{(+1,5 pts)}$$

Aplicamos conservación de la energía mecánica en los instantes $t = 0$ (inicial) y $t = t_f$ (cuando se alcanza el radio máximo):

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2v_0^2}{4}\right)\left(\frac{2}{5R}\right)^2 - \frac{2GMm}{5R}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2(1 - 1/25) = \frac{GMm}{R}(1 - 2/5) \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{5GM}{4R}}} \quad \textbf{(+2,5 pts)}$$

P3.-

Ubicamos el SRI en el camino y el SRNI en el pivote de la barra, notando que:

$$\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{traslacional} = -MA\hat{i} \quad \textbf{(+1,5 pts)}$$

Como la barra está en equilibrio, su aceleración en el SRNI es $\vec{a}' = 0$ La suma de fuerzas reales es

$$\sum \vec{F}_i = N\text{cos}\theta\hat{i} + (N\text{sen}\theta - Mg)\hat{j} \quad \textbf{(+1,5 pts)}$$

Escribiendo la segunda ley de Newton para SRNI:

$$m\vec{a}' = \vec{0} = N\text{cos}\theta\hat{i} + (N\text{sen}\theta - Mg)\hat{j} - mA\hat{i}$$

Separando en componentes, obtenemos el valor del ángulo de equilibrio:

$$\boxed{\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{g}{A}\right)} \quad \textbf{(+3 pts)}$$

P4.-

La aceleración en coordenadas intrínsecas es:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \quad ; \quad \rho = \frac{1}{\kappa} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

La segunda ley de Newton en el punto $(0,0)$ queda:

$$N - mg = m\frac{v^2}{\rho} = mv^2\kappa \quad \textbf{(+2 pts)}$$

Mediante la conservación de la energía (u otro método) encontramos que

$$v^2 = 2gy_0 \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Por otro lado, la curvatura en función de la coordenada x es (sabiendo que $a > 0$):

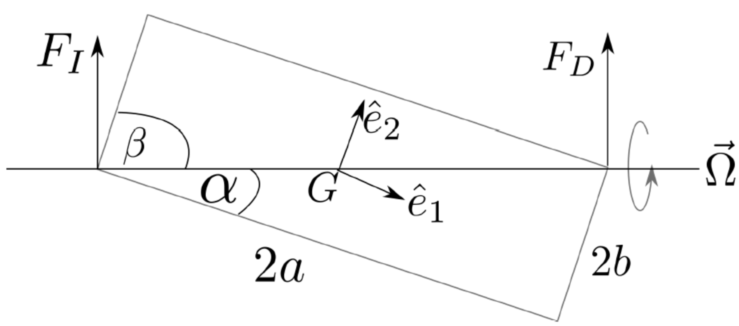
$$\kappa(x) = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \kappa(0) = 2a \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Reemplazando ambos resultados en la expresión para la normal:

$$\boxed{N = mg(1+4ay_0)} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

P5.-

i) Ocupando el siguiente sistema de referencia, hacemos el diagrama de cuerpo libre de la placa



Podemos determinar el tensor de inercia con respecto a los ejes principales y al centro de masa

$$\boxed{\mathbb{I}_G = M\begin{pmatrix} \frac{b^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix}}$$

Donde las componentes del tensor se calculan como:

$$I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)dm \quad \textbf{(+2 pts)}$$

ii) El hint es básicamente las ecuaciones de Euler:

$$\tau_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$
$$\tau_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$$
$$\tau_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

De la figura notamos que con el sistema de referencia definido sobre la lámina, el vector de velocidad angular es:

$$\Omega = \Omega\text{cos}\alpha\hat{e}_1 + \Omega\text{sen}\alpha\hat{e}_2 \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Como la velocidad angular es constante, se anulan las derivadas y como la componente 3 no existe se anulan varios términos, quedando sólo

$$\tau_3 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

Por geometría:

$$\text{cos}\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Con lo que el vector velocidad angular se escribe como

$$\vec{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerando la ecuación anterior, podemos completar la ecuación de Euler, quedando

$$\tau_3 = \frac{M\Omega^2 ab(a^2 - b^2)}{3(a^2 + b^2} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Con esto tenemos la única componente de torque existente. Ahora, calcularemos el torque por definición para poder obtener la magnitud de la reacción. Entonces, por segunda ley de Newton en el sistema de laboratorio tenemos la condición de equilibrio vertical:

$$F_I + F_D = 0 \Rightarrow F_D = -F_I$$
$$F_D = F \quad ; \quad F_I = -F$$

Calculamos el torque de una de las reacciones:

$$\vec{\tau}_D = (a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2) \times (-F\text{sen}\alpha\hat{e}_1 + F\text{cos}\alpha\hat{e}_2) = F\sqrt{a^2 + b^2}\hat{k}$$

Se hace el procedimiento análogo para la otra reacción:

$$\vec{\tau}_I = F\sqrt{a^2 + b^2}\hat{k}$$

Por lo que el torque total es

$$\vec{N}_3 = 2F\sqrt{a^2 + b^2}\hat{k} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Igualando con la expresión para el torque a partir de la ecuación de Euler:

$$\frac{M\Omega^2 ab(a^2 - b^2)}{3(a^2 + b^2)} = 2F\sqrt{a^2 + b^2}$$

Finalmente

$$\boxed{F = \frac{M\Omega^2 ab(a^2 - b^2)}{6(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Es la fuerza sobre uno de los pivotes, que es igual a la sobre el otro pero en sentido opuesto.