FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Resumen Mecánica

1) Cinemática: Ver Auxiliares #1-6 + Extra C1 #1 y #2

- Posición velocidad y aceleración:

  Coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

  Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

- Ecuaciones de movimiento: despejar ecuaciones diferenciales a una variable.

  Trucos con derivadas:

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \quad ; \quad x\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2) \quad ; \quad \dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2)$$

  Ej: Multiplicar por la velocidad, Movimiento Armónico Simple (MAS):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

  Podemos integrar directamente si multiplicamos por $\dot{x}$:

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) + \omega_0^2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = cte = \frac{E}{m}$$

  Nos lleva a la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

  Evaluando en condiciones iniciales podemos despejar $\dot{x}(x)$ e integrar para encontrar la solución $x(t)$.

  El caso general para el movimiento armónico amortiguado forzado está en la Auxiliar Extra C1 #2.

2) Dinámica: Ver Auxiliares #1-6 + Extra C1 #1 y #2

- Fuerzas en 1D: Dependencia de constantes, posición, velocidad, tiempo. $F = m\ddot{x} = F(\{\lambda\}, x, \dot{x}, t)$
  - $\{\lambda\}$: Ej: $F = mg$ (peso)
  - x: Ej: $F = -k(x-l)$ (fuerza elástica)
  - $\dot{x}$: Ej: $F = -b\dot{x}$ (fuerza de roce viscoso)
  - t: Ej: $F = F_0\cos(\omega t)$ (forzajes sinusoidales)
- Fuerzas en 2 y 3D: fuerzas normales $\vec{N}$ y tensiones $\vec{T}$.
  - Cuerdas ideales (sin masa, inextensibles) transmiten la tensión de forma instantánea.
  - Tener especial cuidado con fuerzas de contacto, pueden tener múltiples direcciones.
- Separar $\vec{F} = m\vec{a}$ en ecuaciones escalares y usar técnicas anteriores para integrarlas.
- Forma general, masa puede ser variable, $m(t)$: $\sum \vec{F}_i = d\vec{p}/dt$; $\vec{p} = m\vec{v}$ (momentum lineal)
- Impulso: $\overrightarrow{dp} = \vec{F}dt$; si $\vec{F} = 0$ o $dt = 0$ se conserva el momentum lineal.

3) Trabajo y energía: Ver Auxiliares #3-7 + Extra C1 #1

- Sistemas donde $\vec{F}(\{\lambda\}, x)$ se llaman conservativos. $E = K + U = cte \Rightarrow \dot{E} = 0$ (ec. de movimiento).
- Sistemas donde $\vec{F}(\dot{x}, t)$ se llaman no conservativos. $E = K + U \neq cte \Rightarrow \Delta E = E_f - E_i = W_{F_R} < 0$.
- Fuerza conservativa (el círculo indica que la curva es cerrada, $\nabla\times$: rotor, ∇: gradiente):

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

- Gradiente en distintos sistemas de coordenadas:
  - Cartesianas:
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
  - Cilíndricas:
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
- Rotor en distintos sistemas de coordenadas:
  - Cartesianas:
$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\hat{z}$$
  - Cilíndricas:
$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

4) Fuerzas centrales: Ver Auxiliares #7-12 + Extra C2 #1 y #2

- Definición y propiedades:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad , \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

- Conservación del momentum angular:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad , \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow l = mr^2\dot{\phi} = cte$$

- Conservación de la energía:

$$E = K + U = cte$$

- Potencial central:

$$U(r) = -\int_{ref}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Potencial efectivo:

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

- Radios de equilibrio:

$$U'_{ef}(r_{eq}) = 0$$

- Frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a radios de equilibrio estable:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{U''_{ef}(r_{eq})}{m}} \quad ; \quad U''_{ef}(r_{eq}) > 0$$

- Caso particular: Ley de Gravitación Universal/Potencial Kepleriano

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad ; \quad U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

- Tipos de movimiento orbital según el valor de la energía y el momentum angular:
  - Hipérbola: $E > 0$
  - Parábola: $E = 0$
  - Elipse (órbita acotada): $E < 0$
    - Circunferencia (caso especial): $E = E_{min} = -\frac{G^2M^2m^3}{2l^2}$

- Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = cte$$

Donde a es el radio de órbita circular o semieje mayor en caso de órbita elíptica.

5) Colisiones: Ver Auxiliares #13-16 + Extra C2 #1

- Colisión inelástica: misma velocidad final $\vec{v}_f$, sólo se conserva momentum lineal $\vec{p}$.
- Colisión elástica: se conservan momentum lineal $\vec{p}$ y energía cinética K.
- Colisión elástica + rotación: se conservan momentum lineal $\vec{p}$, angular $\vec{l}$ y energía cinética K.

6) Sistemas de Referencia No Inerciales (SRNI): Ver Auxiliares #21-22 + Extra C3 #1

- Se puede seguir el enfoque de los "10 pasos":
  1) Definir SRI (S) y SRNI (S')
  2) Elegir sistemas de coordenadas para S y S'.
  3) Relacionar coordenadas de S y S'.
  4) Calcular $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$.
  5) Determinar fuerzas reales $\sum \vec{F}_i$.
  6) Determinar $\vec{\Omega}$ y $\dot{\vec{\Omega}}$.
  7) Determinar $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{A}$.
  8) Calcular fuerzas ficticias:
     - $\vec{F}_{traslacional} = -m\vec{A}$
     - $\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$
     - $\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$
     - $\vec{F}_{transversal} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$
  9) Escribir 2da Ley de Newton para SRNI:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i - m\vec{A} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$$

  10) Resolver el problema.

7) Ecuaciones de Lagrange: Ver Auxiliares #23 + Extra C3 #1

- Coordenadas y velocidades generalizadas (i: partícula i-ésima, N: número de partículas/cuerpos):

$$q_i \in \{x, y, z\} \quad \text{o} \quad q_i \in \{\rho, \phi, z\} \quad \text{o} \quad q_i \in \{r, \theta, \phi\} \quad ; \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad ; \quad i \in \{1, ..., 3N\}$$

- Grados de libertad (k: número de restricciones): $G.L. = 3N - k$
- Lagrangiano y Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$L = K - U \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

8) Sistemas extendidos y Sólido Rígido: Ver Auxiliares #17-20, 24-25 + Extra Examen #1

- Momentum angular con respecto a punto $\mathcal{O}$ (típicamente un origen):

$$\vec{l}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Interesa: su conservación, y su relación con el torque, el momento de inercia y la velocidad angular.

- Suma de momenta angulares con respecto a punto $\mathcal{O}$:

$$\vec{l}_{\mathcal{O}}^{\,tot} = \sum_i \vec{l}_{\mathcal{O}}^{\,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Observación: Para un sistema extendido, se cambia la suma por una integral $\sum \to \int$

- Si un sistema rota en torno a un punto fijo P:

$$\vec{l}_P = I_P \vec{\omega}$$

Donde I_P es el momento de inercia con respecto al eje perpendicular que pasa por P.

- Momento de inercia:

$$I_P = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{(discreto)}$$

$$I_P = \int r^2 dm \quad \text{(continuo)}$$

Con:

$$dm = \begin{cases} \lambda dl & (1D) \\ \sigma dS & (2D) \\ \rho d\mathcal{V} & (3D) \end{cases}$$

Donde λ, σ y ρ son la densidad lineal, superficial y volumétrica respectivamente.

- Caso general para el momentum angular (componente traslacional + rotacional):

$$\vec{l}_P = \vec{R} \times \vec{P} + I_{cm}\vec{\omega}$$

Donde $\vec{R}$ une al punto P con el centro de masa cm, $\vec{P}$ es el momentum lineal del centro de masa, I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje perpendicular que pasa por el cm y $\vec{\omega}$ la velocidad angular en torno a dicho eje. Descomposición del sistema en partícula (en el cm) + sistema extendido.

- El torque neto con respecto a un punto P, $\vec{\tau}_P = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, cumple que:

$$\vec{\tau}_P = \frac{d\vec{l}_P}{dt}$$

Observación: por cada componente nula, se conserva el momentum angular en dicha componente.

- Energía mecánica de un sistema extendido:

$$E = K_{tras} + K_{rot} + U = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_P\omega^2 + U$$

Observación: Si $U = U_g = \pm Mgh_{cm}$, con h_{cm} la altura (+) o profundidad (-) del centro de masa.

- Si el sistema rota en torno a un punto fijo P, $K_{tras} = 0$:

$$E = \frac{1}{2}I_P\omega^2 + U$$

Observación: Si la energía se conserva, su derivada temporal $\dot{E} = 0$ da la ecuación de movimiento.

- Teorema de ejes paralelos de Steiner (rotación en torno a un eje):

$$I_P = I_{cm} + MR^2$$

Donde M es la masa del sistema y R es la distancia entre los puntos P y cm.

Observación: Se usará cm (centro de masa) o G (centro de gravedad) indistintamente.

- Tensor de inercia por componentes:

$$I_{ij}^O = \int (r^2\delta_{ij} - r_ir_j)dm$$

- Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

- Tensor de inercia de ejes principales con respecto al centro de masa:

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

- Energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2}MV_G + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t\mathbb{I}_G\vec{\Omega} + U$$

- Vector velocidad angular:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Teorema de Steiner (rotaciones en 3D):

$$I_{ij}^O = I_{ij}^G + M(R_G^2\delta_{ij} - R_{Gi}R_{Gj})$$

- Teorema de la figura plana o de ejes perpendiculares: Si una figura es plana, es decir, $z \approx 0$ se tiene

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

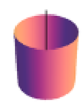
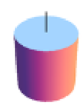
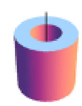
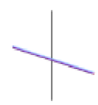
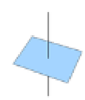
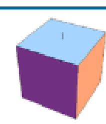
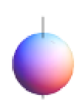
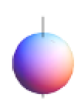
- Vector torque:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

- Ecuaciones de Euler: Definiendo $I_{11} \equiv I_1$, $I_{22} \equiv I_2$, $I_{33} \equiv I_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ \tau_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 \\ \tau_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_3)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

- Momentos de inercia conocidos:

Sólido		**Eje**	**Momento de inercia**
Superficie cilíndrica de radio R y altura h		El del cilindro	MR^2
Cilindro macizo de radio R y altura h		El del cilindro	$\frac{1}{2}MR^2$
Cilindro hueco de radio interior R_1, exterior R_2 y altura h		El del cilindro	$\frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
Varilla rectilínea de longitud H		Perpendicular por el centro	$\frac{1}{12}MH^2$
Paralelogramo de lados b y h (incluye cuadrados, rectángulos y rombos)		Perpendicular por el centro	$\frac{M(b^2+h^2)}{12}$
Cubo macizo de arista R		Cualquiera que pase por su centro	$\frac{Ma^2}{6}$
Esfera hueca de radio R		Cualquiera que pase por su centro	$\frac{2MR^2}{3}$
Esfera maciza de radio a		Cualquiera que pase por su centro	$\frac{2MR^2}{5}$