Auxiliar 25

30/06

P1// Se tienen las ecuaciones de Euler:

$$I_1\dot{w}_1 + w_2w_3(I_2 - I_3) = \tau_1$$
$$I_2\dot{w}_2 + w_3w_1(I_3 - I_1) = \tau_2$$
$$I_3\dot{w}_3 + w_1w_2(I_1 - I_2) = \tau_3$$

Escogemos las coordenadas asociadas al cuerpo (e_1, e_2, e_3). Con esto, la velocidad angular queda:

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (w\sin(\alpha), 0, w\cos(\alpha))$$

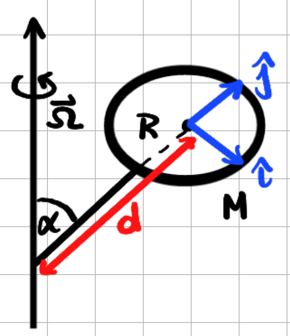
De aquí se desprende $\dot{\vec{w}} = 0$. Usando que $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{4}MR^2$, se tiene $\tau_1 = \tau_3 = 0$, y además:

$$\tau_2 = w_1w_3\left(\frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{4}MR^2\right) = -\frac{1}{4}MR^2w^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Luego, sabemos que $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$ y que los pivotes hacen fuerzas de igual magnitud pero en direcciones opuestas. Con esto:

$$|\vec{F}| = \frac{|\tau_2|}{2d} = \frac{1}{8d}MR^2w^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{16d}MR^2\sin(2\alpha)$$

P2// Ponemos el sistema de referencia coincidente con el centro del anillo, y usamos coordenadas cartesianas, tq:



$$\vec{r} = R\cos(\theta)\hat{i} + R\sin(\theta)\hat{j}$$

Calculamos el tensor por definición:

$$I^G_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_ir_j)\,dm$$

Como estamos en un anillo, estaremos recorriendo una línea, y por esto, $dm = \lambda dl$. Como la masa está uniformemente distribuida a lo largo del perímetro del anillo:

$$\lambda = \frac{\text{masa}}{\text{largo}} = \frac{M}{2\pi R}$$

Y dl al describir una pequeña longitud de arco será $Rd\theta$. Así el tensor de inercia será de la forma:

$$I^G_{ij} = \int_0^{2\pi} (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)\cdot \frac{M}{2\pi}\, d\theta$$

Como se está en los ejes principales, el tensor será diagonal. Luego calculamos cada componente por separado:

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} (R^2 - R^2\cos^2(\theta))\cdot \frac{M}{2\pi}\, d\theta = \frac{MR^2}{2}$$
$$I_{22} = \int_0^{2\pi} (R^2 - R^2\sin^2(\theta))\cdot \frac{M}{2\pi}\, d\theta = \frac{MR^2}{2}$$
$$I_{33} = \int_0^{2\pi} R^2\cdot \frac{M}{2\pi}\, d\theta = MR^2$$

Juntando esto:

$$I_G = MR^2\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero el tensor que buscamos está en un sistema de coordenadas con origen en el punto donde la barra AB se une al eje de rotación. Para esto usamos el Teorema de Steiner:

$$I^O_{ij} = I^G_{ij} + M(R_G^2\delta_{ij} - R_{Gi}R_{Gj})$$

$\vec{R_G} = (0, d, 0)$, siendo $d = R + d_{AB}$, d_{AB} el largo de la barra. Considerando esto se tiene el tensor pedido.

$$\begin{aligned} I^O_{11} &= I^G_{11} + Md^2 \\ I^O_{22} &= I^G_{22} \\ I^O_{33} &= I^G_{33} + Md^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad I_O = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} + Md^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} + Md^2 \end{pmatrix}$$

b) El vector momentum angular será:

$$\vec{l} = I_O\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} + Md^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} + Md^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ w\cos(\alpha) \\ w\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$\vec{\Omega}$ se escribió en función de las componentes del tensor de inercia.

c) Para encontrar el valor del momento de inercia respecto al eje de rotación, debemos escribir dicha dirección en término de las componentes del tensor.

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Misma dirección de $\vec{\Omega}$

Luego lo pedido será:

$$I_{\hat{n}} = \hat{n}^T I_0 \hat{n}$$