

FI2001-6: Mecánica**Profesor:** Claudio Romero Z.**Auxiliar:** Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 24

Conceptos útiles:

- Tensor de inercia por componentes:

$$I_{ij}^O = \int (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dm$$

- Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

- Energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \mathbb{I}_G \vec{\Omega} + U$$

- Vector velocidad angular:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Teorema de Steiner:

$$I_{ij}^O = I_{ij}^G + M(R_G^2 \delta_{ij} - R_{Gi} R_{Gj})$$

Problemas:

- Aprovechamos la simetría cilíndrica para escribir el tensor de inercia con respecto a los ejes principales del cilindro. De esta forma:

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

Primero, escribimos el vector posición en coordenadas cilíndricas (sistema de referencia es siempre cartesiano):

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k} = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 + r_3 \hat{e}_3$$

A continuación, calculamos las componentes del tensor de inercia:

$$I_{11} = \int (\rho^2 + z^2 - \rho^2 \cos^2 \phi) dm = \int (\rho^2 \sin^2 \phi + z^2) dm$$

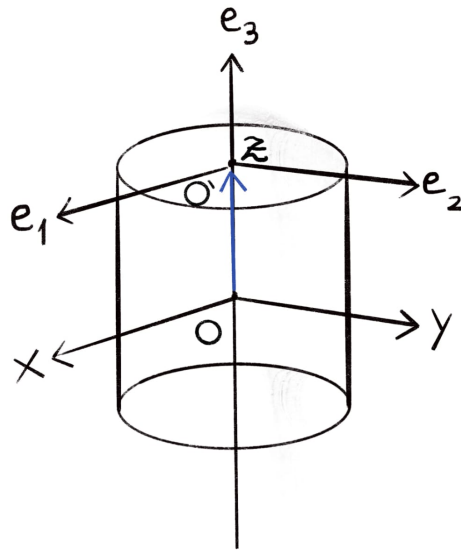
$$dm = \rho_0 dV = \frac{M}{\pi R^2 h} \rho d\rho d\phi dz$$

$$I_{11} = \frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho^2 \sin^2 \phi + z^2) \rho d\rho d\phi dz = \frac{M}{\pi R^2 h} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \sin^2 \phi d\phi dz + 2\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \frac{R^2}{2} dz \right)$$

$$I_{11} = \frac{M}{\pi R^2 h} \left(\frac{R^4}{4} h \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi + \pi R^2 \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right) = M \left(\frac{R^4}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

Donde se usó que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \right) d\phi = \pi$$



Por simetría, hacer girar al cilindro en torno a uno de sus diámetros (ejes e_1 y e_2 de la figura) considera el mismo momento de inercia, con lo que:

$$I_{22} = I_{11} = M \left(\frac{R^4}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

Con respecto a I_{33} , lo reconocemos como el momento de inercia conocido de un cilindro macizo uniforme con respecto a su eje vertical:

$$I_{33} = \frac{1}{2}MR^2$$

Finalmente, el tensor de inercia de ejes principales con respecto al centro de masas es:

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix}$$

2. Notemos que en este caso, ρ varía con z .

a) El vector centro de masa es:

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad : \quad \vec{r} = \rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k}$$

$$dm = \rho_0 dV = \frac{M}{\frac{\pi R^2 h}{3}} \rho d\rho d\phi dz$$

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \frac{3M}{\pi R^2 h} \int \int \int (\rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k}) \rho d\rho d\phi dz$$

Por geometría, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{h}{R} = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \frac{h}{R} \rho$$

Integramos en el siguiente orden:

$$\vec{R}_G = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h\rho}{R}}^h (\rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k}) dz \rho d\rho d\phi$$

Por el teorema de Fubini, y notando que:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$$

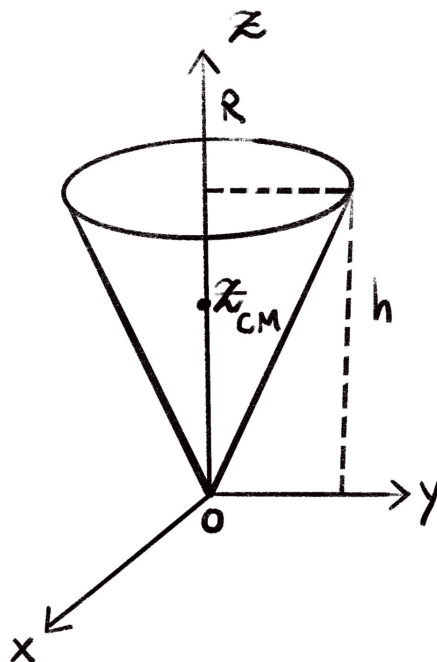
Se tiene que:

$$\vec{R}_G = 2\pi \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^R \int_{\frac{h\rho}{R}}^h z dz \rho d\rho \hat{k} = \frac{6}{R^2 h} \int_0^R \frac{1}{2} \left(h^2 - \frac{h^2 \rho^2}{R^2} \right) \rho d\rho \hat{k}$$

Finalmente:

$$\vec{R}_G = \frac{3}{R^2 h} \left(\frac{h^2 R^2}{2} - \frac{h^2 R^4}{4R^2} \right) \hat{k} = \frac{3}{4} h \hat{k} = (0, 0, \frac{3}{4} h)$$

b) Nuevamente, por simetría, se tiene que:



$$I_{11} = I_{22}$$

Con:

$$I_{11} = \int_V (\rho^2 + z^2 - \rho^2 \cos^2 \phi) dm = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int \int \int (\rho^2 \sin^2 \phi + z^2) \rho d\rho d\phi dz$$

$$I_{11} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h\rho}{R}}^h (\rho^3 \sin^2 \phi + z^2 \rho) dz d\rho d\phi = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\rho^3 \sin^2 \phi \left(h - \frac{h\rho}{R} \right) + \frac{\rho}{3} \left(h^3 - \frac{h^3 \rho^3}{R^3} \right) \right] d\rho d\phi$$

$$I_{11} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4 h \sin^2 \phi}{4} - \frac{R^5 h \sin^2 \phi}{5R} + \frac{R^2 h^3}{6} - \frac{h^3 R^5}{15R^3} \right) d\phi = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4 h \sin^2 \phi}{20} + \frac{R^2 h^3}{10} \right) d\phi$$

$$I_{11} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \left(\frac{R^4 h \pi}{20} + \frac{R^2 h^3 \pi}{5} \right) = \frac{3}{20} M R^2 + \frac{3}{5} M h^2$$

El cálculo de I_{33} , aplicando Fubini entre ρ y z es:

$$I_{33} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int \int \int (\rho^2 + z^2 - z^2) \rho d\rho d\phi dz = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h\rho}{R}}^h \rho^3 dz d\rho d\phi$$

$$I_{33} = \frac{3M}{\pi R^2 h} 2\pi \int_0^R \rho^3 \left(h - \frac{h\rho}{R} \right) d\rho = \frac{6M}{R^2 h} \left(\frac{R^4}{4} h - \frac{h R^5}{5R} \right) = \frac{3}{10} M R^2$$

Por lo tanto, el tensor de inercia de ejes principales con respecto a la cúspide del cono es:

$$\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} M\left(\frac{3R^2}{20} + \frac{3h^2}{5}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{3R^2}{20} + \frac{3h^2}{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}$$

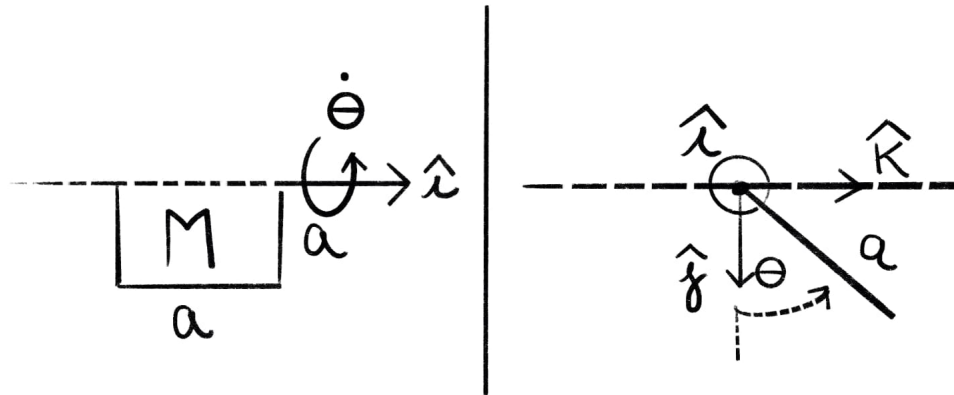
c) Para determinar $\mathbb{I}_G$, usamos el teorema de Steiner:

$$I_{ij}^G = I_{ij}^O - M(R_G^2 \delta_{ij} - R_{Gi} R_{Gj})$$

Con $\vec{R}_G = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{3}{4}h\hat{k}$, $R_G^2 = \frac{9}{16}h^2$. En consecuencia:

$$\mathbb{I}_G = \mathbb{I}_O - M \begin{pmatrix} \frac{9h^2}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9h^2}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Calculamos I_{ij}^G con los ejes de la figura y luego los trasladamos con Steiner:



$$I_{11} = \int (r^2 \delta_{11} - r_1 r_1) dm \quad ; \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad ; \quad dm = \frac{M}{a^2} dx dy$$

$$I_{11} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2 - x^2) \frac{M}{a^2} dx dy = \frac{M}{a^2} a \frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{M}{3a} \frac{2a^3}{8} = \frac{1}{12} M a^2$$

Notamos que hay un sólo eje de rotación:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{i} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que no nos interesan I_{22} ni I_{33} . La energía mecánica se conserva y con respecto al eje de giro es:

$$E = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \mathbb{I}_O \vec{\Omega} + U$$

Trasladamos I_{11} y el tensor de inercia con Steiner:

$$I_O = \frac{1}{12} M a^2 + M \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M a^2$$

$$\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} M a^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

Introduciendo en la expresión para la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{6} M a^2 \dot{\theta}^2 + U$$

La energía potencial es:

$$U = M g y_G = -M g \frac{a}{2} \cos \theta$$

Reemplazando en la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{6} M a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} M g a \cos \theta$$

La derivada con respecto al tiempo es nula:

$$\dot{E} = 0 = \frac{1}{3} M a^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} M g a \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\frac{a^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{g a}{2} \sin \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2a} \sin \theta = 0}$$

b) Linealizamos la ecuación de movimiento para pequeñas oscilaciones:

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2a} \theta = 0$$

La frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\boxed{\omega_{p.o} = \sqrt{\frac{3g}{2a}}}$$