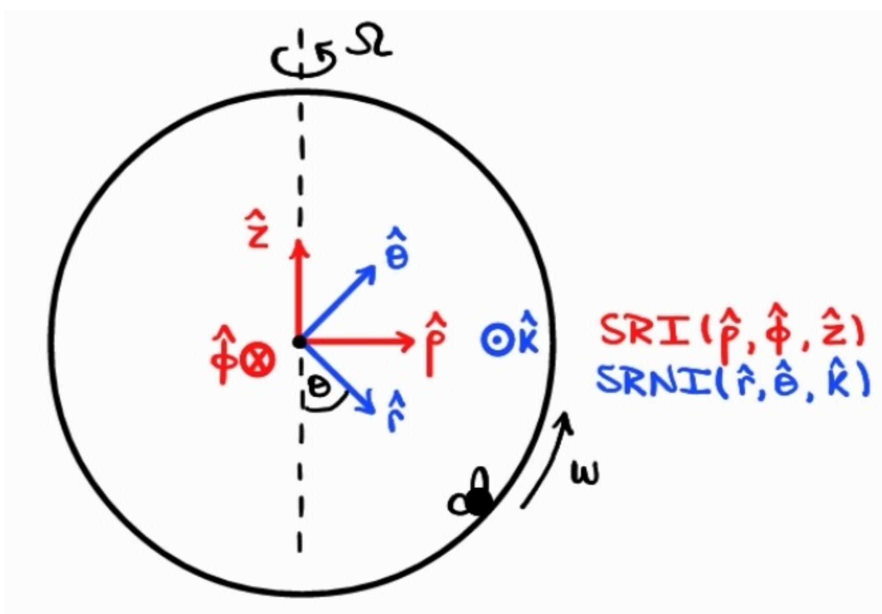
Pauta Control 3

Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliares: Jerónimo Herrera G. - Rodrigo Catalán B.
Ayudantes: Gerald Barnert S. - Diana Escobar C.

P1.-

i) Se tiene que SRI y SRNI están centrados en $O = O'$ (ver figura), con lo que:

$$\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = \vec{0} \quad \textbf{(+0,6 pts.)}$$



Las coordenadas del SRI son $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$, las del SRNI son $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k})$. La relación entre los sistemas:

$$\hat{\rho} = \text{sen}\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta} \quad ; \quad \hat{r} = \text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\theta\hat{z}$$
$$\hat{z} = -\cos\theta\hat{r} + \text{sen}\theta\hat{\theta} \quad ; \quad \hat{\theta} = \cos\theta\hat{\rho} + \text{sen}\theta\hat{z}$$
$$\hat{\phi} = -\hat{k} \quad ; \quad \hat{k} = -\hat{\phi} \quad \textbf{(+0,6 pts.)}$$

La posición, velocidad y aceleración del insecto en ambos sistemas de referencia son (con $\dot{\theta} = \omega$):

$$\vec{r}' = R\hat{r} = R(\text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\theta\hat{z})$$

$$\vec{v}' = R\dot{\theta}\hat{\theta} = R\dot{\theta}(\cos\theta\hat{\rho} + \text{sen}\theta\hat{z})$$

$$\vec{a}' = -R\dot{\theta}^2\hat{r} = -R\dot{\theta}^2(\text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\hat{z}) \quad \textbf{(+1,2 pts.)}$$

Las fuerzas ficticias, considerando que $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$, $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$, son:

- $\vec{F}_{traslacional} = -m\vec{A} = \vec{0}$
- $\vec{F}_{transversal} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = \vec{0}$
- $\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = -mR\Omega^2[\hat{z} \times (\hat{z} \times (\text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\theta\hat{z}))] = mR\Omega^2\text{sen}\theta\hat{\rho}$
- $\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = -2mR\Omega\dot{\theta}[\hat{z} \times (\cos\theta\hat{\rho} + \text{sen}\theta\hat{z})] = -2mR\Omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi} \quad$ **(+1,6 pts.)**

ii) La fuerza real es $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -N_r\hat{r} - N_k\hat{k} = -N_r(\text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\theta\hat{z}) + F_\perp\hat{\phi} \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

La ecuación de movimiento para el insecto, considerando los vectores unitarios del SRI es:

$$-mR\dot{\theta}^2(\text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\theta\hat{z}) = -N_r(\text{sen}\theta\hat{\rho} - \cos\theta\hat{z}) + F_\perp\hat{\phi} + mR\Omega^2\text{sen}\theta\hat{\rho} - 2mR\Omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi} \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

Notando que el lado izquierdo no posee componente $\hat{\phi}$ y tomando $\theta(t) = \omega t$, se tiene que:

$$F_\perp - 2mR\Omega\dot{\theta}\cos\theta = 0 \Rightarrow F_\perp = 2mR\Omega\omega\cos\omega t \quad \textbf{(+1 pt.)}$$

$\boxed{\textbf{P2}.-}$

i) Las posiciones de las masas M y m son $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente. Por geometría:

$$\vec{r}_1 = x\hat{i} \quad ; \quad \vec{r}_2 = (x + l\text{sen}\theta)\hat{i} - l\cos\theta\hat{j} \quad \textbf{(+1 pt.)}$$

ii) Las velocidades son:

$$\vec{v}_1 = \dot{x}\hat{i} \quad ; \quad \vec{v}_2 = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)\hat{i} + l\dot{\theta}\text{sen}\theta\hat{j} \quad \textbf{(+0,4 pts.)}$$

Por lo tanto, las energías cinéticas son:

$$K_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad ; \quad K_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) \quad ; \quad K = K_1 + K_2 \quad \textbf{(+0,6 pts.)}$$

iii) Las energías potenciales son:

$$U_1 = mgy_1 = 0 \quad ; \quad U_2 = mgy_2 = -mgl\cos\theta \quad ; \quad U = U_1 + U_2 \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

En consecuencia, el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgl\cos\theta \quad \textbf{(+1 pt.)}$$

iv) La ecuación de Lagrange para la coordenada θ es:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}\text{sen}\theta - mgl\text{sen}\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\text{cos}\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} - ml\dot{x}\dot{\theta}\text{sen}\theta \quad \textbf{(+0,4 pts.)}$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange para θ, se obtiene:

$$l^2\ddot{\theta} + l\ddot{x}\text{cos}\theta + gl\text{sen}\theta = 0$$

Linealizando para $\theta << 1$:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{l}\ddot{x} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \textbf{(+0,4 pts.)}$$

Por otro lado, la ecuación de Lagrange para la coordenada x es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Con:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + ml\dot{\theta}\text{cos}\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\text{cos}\theta - ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta = 0 \quad \textbf{(+0,4 pts.)}$$

Linealizando para $\theta << 1$, considerando $\dot{\theta}^2 \approx 0$:

$$(m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{ml}{m+M}\ddot{\theta} \quad \textbf{(+0,4 pts.)}$$

Reemplazando $\ddot{x}$ en la ecuación de Lagrange para θ, se obtiene:

$$\ddot{\theta} + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\theta = 0 \quad \textbf{(+0,4 pts.)}$$

v) Reconocemos la frecuencia angular como la de pequeñas oscilaciones:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}} \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$

i) Por conservación del momentum lineal, se obtiene v_A:

$$p_i = p_f \Rightarrow 0 = mv_0 - mv_A \Rightarrow v_A = v_0 \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

Luego, como el choque es bidimensional, aplicamos conservación del vector momentum lineal, y de la energía cinética, al ser elástico:

$$\vec{p}_{Bi} = \vec{p}_{Bf} + \vec{p}_{Cf}$$

$$\frac{p_{Bi}^2}{2m} = \frac{p_{Bf}^2}{2m} + \frac{p_{Cf}^2}{2m} \Rightarrow p_{Bi}^2 = p_{Bf}^2 + p_{Cf}^2 \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

Elevando al cuadrado la ec. de conservación del momentum y reemplazando p_{Bi}^2:

$$p_{Bi}^2 = p_{Bf}^2 + p_{Cf}^2 + 2\vec{p}_{Bf} \cdot \vec{p}_{Cf} = p_{Bi}^2 + 2\vec{p}_{Bf} \cdot \vec{p}_{Cf} \Rightarrow \vec{p}_{Bf} \cdot \vec{p}_{Cf} = 0 \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

Como los momenta finales son perpendiculares, es directo que:

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

ii) Aplicamos conservación del momentum por componentes:

$$\hat{i} : mv_0 = mv_B\cos\theta + mv_C\cos\phi$$

$$\hat{j} : 0 = mv_B\text{sen}\theta - mv_C\text{sen}\phi \Rightarrow v_C = \sqrt{3}v_B \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

Reemplazando v_C en función de v_B en la ecuación de la componente $\hat{i}$:

$$v_0 = v_B\left[\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{2} \quad ; \quad v_C = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \quad \textbf{(+0,5 pts.)}$$

Finalmente, los vectores momentum lineal de las tres masas después del choque son:

$$\vec{p}_A = -mv_0\hat{i} \quad \textbf{(+1 pt.)}$$

$$\vec{p}_B = \frac{mv_0}{2}(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) = \frac{mv_0}{4}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}mv_0}{4}\hat{j} \quad \textbf{(+1 pt.)}$$

$$\vec{p}_C = \frac{\sqrt{3}}{2}mv_0(\cos\phi\hat{i} - \text{sen}\phi\hat{j}) = \frac{3mv_0}{4}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}mv_0}{4}\hat{j} \quad \textbf{(+1 pt.)}$$