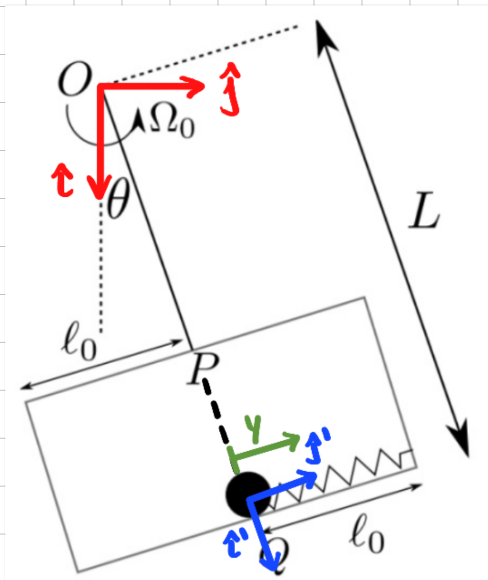
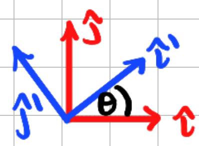
Auxiliar Extra C3 #1

23/06

P1//



Vectores de S' en función de S



$$\hat{\imath}' = \cos(\Omega_0 t)\hat{\imath} + \sin(\Omega_0 t)\hat{\jmath}$$
$$\hat{\jmath}' = -\sin(\Omega_0 t)\hat{\imath} + \cos(\Omega_0 t)\hat{\jmath}$$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ respecto a S

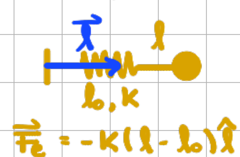
$$\vec{r} = y\hat{\jmath}' \ , \ \vec{v} = \dot{y}\hat{\jmath}' \ , \ \vec{a} = \ddot{y}\hat{\jmath}'$$

$\ddot{\vec{R}}$ del SRNI respecto a SRI

$$\vec{R} = L\hat{\imath}' \rightarrow \ddot{\vec{R}} = -\Omega_0^2 L \hat{\imath}'$$

Fuerzas Reales:

$$\vec{N} = -N\hat{\imath}' \ , \ \vec{P} = mg\hat{\imath} = mg(\cos(\Omega_0 t)\hat{\imath}' - \sin(\Omega_0 t)\hat{\jmath}')$$



$$\vec{F}_e = -k[(l_0 - y) - l_0](-\hat{\jmath}')$$
$$= -ky\hat{\jmath}'$$

Fuerzas ficticias:

- $\vec{F}_{tras} = -m\ddot{\vec{R}} = m\Omega_0^2 L\hat{\imath}'$
- $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m\Omega_0^2 y\hat{\jmath}'$
- $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = 2m\Omega_0 \dot{y}\hat{\imath}'$
- $\vec{F}_{azi} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0$

Ecuaciones de movimiento:

$\hat{\jmath}']$ $m\ddot{y} = -mg\sin(\Omega_0 t) - ky + m\Omega_0^2 y$

$\hat{\imath}']$ $0 = mg\cos(\Omega_0 t) - N + m\Omega_0^2 L + 2m\Omega_0\dot{y}$

En la componente $\hat{\jmath}$ reemplazamos $m\Omega_0^2 = k$, con lo que se tendrá:

$$\cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g\sin(\Omega_0 t) - \cancel{Ky} + \cancel{Ky}$$

Tenemos una EDO, cuyas condiciones iniciales eran $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, por lo que:

$$\int_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}} d\dot{y} = -g\int_0^t \sin(\Omega_0 t)dt$$

$$\dot{y}(t) = \frac{g}{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\Big|_0^t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{g}{\Omega_0}(\cos(\Omega_0 t) - 1)$$

$$\int_{y(0)}^{y} dy = \frac{g}{\Omega_0}\int_0^t \cos(\Omega_0 t)dt - \frac{g}{\Omega_0}\int_0^t dt$$

$$y(t) = \frac{g}{\Omega_0^2}(\sin(\Omega_0 t) - \Omega_0 t) /\!/$$

b) Para que la partícula nunca se separe del recipiente se debe cumplir que $N \geq 0$ para todos sus valores, incluyendo el mínimo. De la componente $\hat{i}$ despejamos N.

$$N = mg\cos(\Omega_0 t) + m\Omega_0^2 L + 2m\Omega_0\dot{y}$$

Reemplazando $\dot{y}$:

$$N = mg\cos(\Omega_0 t) + m\Omega_0^2 L + 2m\cancel{\Omega_0}\frac{g}{\cancel{\Omega_0}}(\cos(\Omega_0 t) - 1)$$

$$N = 3mg\cos(\Omega_0 t) + m\Omega_0^2 L - 2mg$$

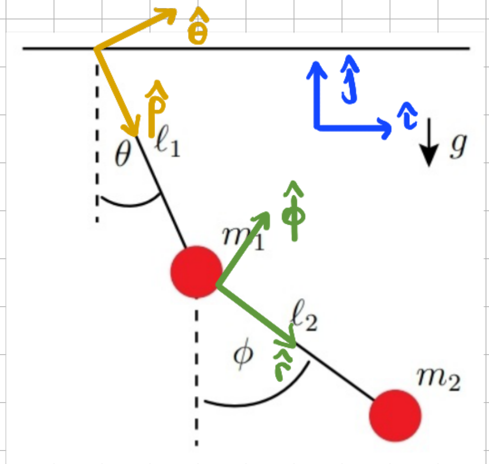
$$\rightarrow 3g\cos(\Omega_0 t) + \Omega_0^2 L - 2g \geq 0$$

El mínimo se alcanza cuando $\cos(\Omega_0 t) = -1$. Con esto:

$$3g \leq \Omega_0^2 L - 2g$$

$$\therefore \Omega_0^2 \geq \frac{5g}{L} /\!/$$

P2// Definimos diferentes sistemas de referencia:



$\hat{r} = -\cos(\phi)\hat{j} + \sin(\theta)\hat{i}$

$\hat{\rho} = -\cos(\theta)\hat{j} + \sin(\theta)\hat{i}$

$\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ posiciones y velocidades de las masas 1 y 2 respectivamente.

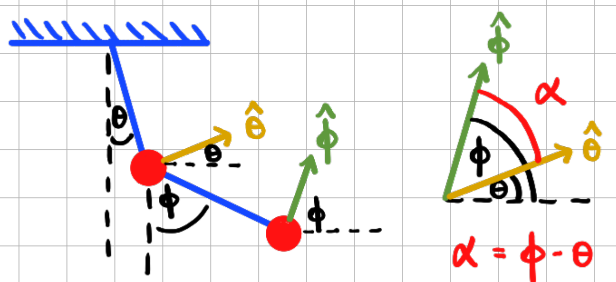
$$\vec{r}_1 = l_1\hat{\rho} \rightarrow \vec{v}_1 = l_1\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{r}_2 = l_1\hat{\rho} + l_2\hat{r} \rightarrow \vec{v}_2 = l_1\dot{\theta}\hat{\theta} + l_2\dot{\phi}\hat{\phi}$$

Para el Lagrangiano necesitamos K y U del sistema, que estarán dados por:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2\dot{\theta}_2 + m_2\left(l_1^2\dot{\theta}^2 + l_2^2\dot{\phi}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}\dot{\phi}(\hat{\theta}\cdot\hat{\phi})\right)\right)$$

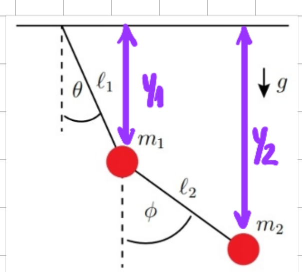
$* \ \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = \cancel{\|\hat{\theta}\|}^{1}\cancel{\|\hat{\phi}\|}^{1}\cos(\alpha) = \cos(\alpha)$, ¿Cuánto vale α?



$\alpha = \phi - \theta$

$$K = \frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2\dot{\theta}_2 + m_2\left(l_1^2\dot{\theta}^2 + l_2^2\dot{\phi}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right)\right]$$

$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$, siendo y_1 e y_2 las alturas de las masas 1 y 2 respectivamente, las cuales serán:



$y_1 = -l_1\cos(\theta)$

$y_2 = -l_1\cos(\theta) - l_2\cos(\phi)$

$\therefore U = -m g l_1\cos(\theta) - m_2 g\left(l_1\cos(\theta) + l_2\cos(\phi)\right)$

$$\therefore L = K - U = \frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2\dot{\theta}_2 + m_2\left(l_1^2\dot{\theta}^2 + l_2^2\dot{\phi}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right)\right] + m g l_1\cos(\theta) + m_2 g\left(l_1\cos(\theta) + l_2\cos(\phi)\right)$$

b) Aproximaciones de orden 2 para $\theta, \phi \ll 1$, esto es, $\sin(\alpha) \sim \alpha \wedge \cos(\alpha) \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

$$L = \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2 \dot\theta_2 + m_2 \left(l_1^2\dot\theta^2 + l_2^2\dot\phi^2 + 2l_1 l_2 \dot\theta\dot\phi\left(1 - \frac{(\phi-\theta)^2}{2}\right)\right)\right] \\ + m_1 g l_1\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + m_2 g l_1\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + m_2 g l_2\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \end{array}$$

El término $2m_2 l_1 l_2 \dot\theta\dot\phi \frac{(\phi-\theta)^2}{2}$ se elimina pues es de orden 4. También eliminamos los términos constantes, pues no aportan. Luego:

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot\theta^2 + l_2^2\dot\phi^2 + 2l_1 l_2\dot\theta\dot\phi\right) - \frac{1}{2}m_1 g l_1\theta^2 - \frac{1}{2}m_2 g\left(l_1\theta^2 + l_2\phi^2\right)$$

Usamos Ecuaciones de Euler - Lagrange para θ y ϕ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot\theta}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot\phi}\right) - \frac{dL}{d\phi} = 0$$

$$\frac{dL}{d\dot\theta} = m_1 l_1^2\dot\theta + m_2 l_1^2\dot\theta + m_2 l_1 l_2\dot\phi \qquad\qquad \frac{dL}{d\dot\phi} = m_2 l_2^2\dot\phi + m_2 l_1 l_2\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot\theta}\right) = m_1 l_1\ddot\theta + m_2 l_1^2\ddot\theta + m_2 l_1 l_2\ddot\phi \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot\phi}\right) = m_2 l_2^2\ddot\phi + m_2 l_1 l_2\ddot\theta$$

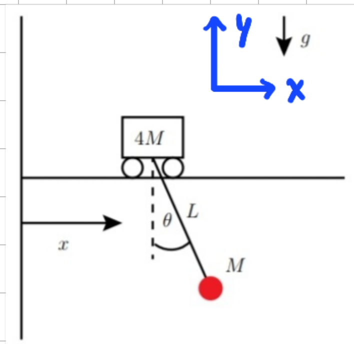
$$\frac{dL}{d\theta} = -m_1 g l_1\theta - m_2 g l_1\theta \qquad\qquad \frac{dL}{d\phi} = -m_2 g l_2\phi$$

Juntando esto, las ecuaciones de movimiento serán:

$\theta]$ $l_1^2\ddot\theta(m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2\ddot\phi + m_1 g l_1\theta + m_2 g l_1\theta = 0$

$\phi]$ $m_2 l_2\ddot\phi + m_2 l_1 l_2\ddot\theta + m_2 g l_2\phi = 0$

P3//



La posición del carrito será $x_c = x$

La del péndulo será $x_p = x_c + L\sin(\theta)$
$y_p = -L\cos(\theta)$

Calculamos K y U para obtener el Lagrangiano:

$$K = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} \cdot 4M \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M\left((\dot{x} + L\dot{\theta}\cos(\theta))^2 + L^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta)\right)$$

$$U = 4Mgy_c + Mgy_p = Mgy_p = -MgL\cos(\theta)$$

Así el Lagrangiano queda:

$$L = 2M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + M\dot{x}L\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta) + MgL\cos(\theta)$$

$$L = \frac{5}{2}M\dot{x}^2 + ML\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL\cos(\theta)$$

b) Para pequeñas oscilaciones usamos $\cos(\theta) \sim 1 - \theta^2/2$. Así:

$$L = \frac{5}{2}M\dot{x}^2 + ML\dot{x}\dot{\theta} - \underbrace{\frac{1}{2}ML\dot{x}\dot{\theta}\theta^2}_{\text{Orden } 4} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \underbrace{mgL}_{\text{cte}} - \frac{1}{2}MgL\theta^2$$

$$L = \frac{5}{2}M\dot{x}^2 + ML\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}MgL\theta^2$$

Usamos ecuaciones Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = 5M\dot{x} + ML\dot{\theta} \qquad\qquad \frac{dL}{d\dot{\theta}} = ML\dot{x} + ML^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) = 5M\ddot{x} + ML\ddot{\theta} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = ML\ddot{x} + ML^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \qquad\qquad \frac{dL}{d\theta} = -MgL\theta$$

$$\therefore\ 5M\ddot{x} + ML\ddot{\theta} = 0 \qquad\qquad \therefore\ ML\ddot{x} + ML^2\ddot{\theta} + MgL\theta = 0$$

c) Como $\theta(t) = 0, \forall t$, entonces $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Así se tiene:

$$5M\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t$$

d) A partir del Lagrangiano tenemos:

$$\ddot{x} = -L\ddot{\theta}/5$$
$$\ddot{\theta} + \ddot{x}/L + g/L \cdot \theta = 0$$

De la primera se desprende $x = -L\theta/5 + At + B$. En la segunda reemplazamos el valor de $\ddot{x}$, quedando así:

$$\ddot{\theta} - \ddot{\theta}/5 + g/L \cdot \theta = 0$$

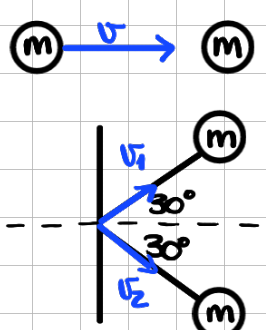
$$\ddot{\theta}(1 - 1/5) + g/L \cdot \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{5}{4}\frac{g}{L}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

Luego $\theta(t) = C\cos(\omega_0 t + \delta) \rightarrow x(t) = -\frac{LC}{5}\cos(\omega_0 t + \delta) + At + B$. Para los modos normales tomamos $B = 0$. Así:

- Si $A = 0 \rightarrow x(t) = -\frac{L}{5}\theta(t)$
- Si $C = 0 \rightarrow x(t) = At$

p4//



Usamos conservación momento lineal:

$$\cancel{m}\vec{v} = \cancel{m}\vec{v}_1 + \cancel{m}\vec{v}_2$$

$$v\hat{x} = v_1(\cos(30)\hat{x} + \sin(30)\hat{y}) + v_2(\cos(30)\hat{x} - \sin(30)\hat{y})$$

$\hat{x}]\ v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(v_1 + v_2) \rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2v_1 \Rightarrow v_1 = v_0/\sqrt{3}$

$\hat{y}]\ 0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) \rightarrow v_1 = v_2$

Inicialmente la energía era $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$. Al final se tendrá:

$$K_f = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) = m v_1^2 = \frac{1}{3}mv_0^2$$

No se conserva K pues $K_f \neq K_i$ //

b) 

Primero vemos la velocidad que tendrá el conjunto justo después del choque

$$mv = (m+M)v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{mv}{m+M}$$

Inicialmente toda la energía será cinética, es decir:

$$E = K = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+M}$$

Toda esta energía se convertirá en potencial elástica.

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+M}$$

$$\therefore \Delta x = mv\sqrt{\frac{1}{K(m+M)}}$$

c) Sabemos el choque es elástico, por lo que se conserva momento lineal y energía cinética. Sea $\vec{v}$ la velocidad inicial, y $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ las finales. Los relaciones serán:

$$\cancel{m}\vec{v} = \cancel{m}\vec{v}_1 + \cancel{m}\vec{v}_2 \quad , \quad \cancel{\tfrac{1}{2}}mv^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}mv_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}mv_1^2$$

Elevamos al cuadrado la ecuación de momento, sin perder la notación vectorial:

$$\overbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}^{v^2} = \overbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}^{v_1^2} + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \overbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}^{v_2^2}$$

$$v^2 = v_1^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + v_2^2$$

Restando esta expresión con la ecuación de energía cinética se llega a:

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$$

Escribimos esto por definición de producto punto:

$$\|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|\cos(\alpha) = 0$$

Los módulos de velocidades no pueden ser 0 $\rightarrow \cos(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = 90°$