FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 22

- Segunda Ley de Newton para Sistemas de Referencia No Inerciales:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

1. *a*) Seguimos el enfoque de los ”10 pasos”:
   1) Definir SRI (S) y SRNI (S'): Es directo que S está ubicado estáticamente sobre la rotación de la barra. Por otro lado, S' rota con la barra, compartiendo un origen común con S, $O' = O$.
   2) Elegir sistemas de coordenadas para S y S': La figura nos indica que $S(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ y $S'(\hat{\imath}',\hat{\jmath}',\hat{k}')$.
   3) Relacionar coordenadas de S y S': Notamos que S y S' comparten un eje z en común: $\hat{k}' = \hat{k}$.
   4) Calcular $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$: En S', los vectores unitarios no cambian: $\vec{r}' = x\hat{\imath}'$, $\vec{v}' = \dot{x}\hat{\imath}'$, $\vec{a}' = \ddot{x}\hat{\imath}'$
   5) Determinar fuerzas reales: Sobre la partícula sólo actúa la normal. En S', $\vec{F} = N\hat{\jmath}'$.
   6) Determinar $\vec{\Omega}$ y $\dot{\vec{\Omega}}$: Se tiene que $\vec{\Omega} = \omega\hat{k}'$. Como ω es constante, $\dot{\vec{\Omega}} = 0$.
   7) Determinar $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{A}$: Como calzan los orígenes de ambos sistemas, $\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \vec{A} = 0$.
   8) Calcular fuerzas ficticias:
      - $m\vec{A} = \vec{0}$
      - $m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m(\omega\hat{k}')\times[(\omega\hat{k}')\times(x\hat{\imath}')] = m\omega^2x[\hat{k}'\times(\hat{k}'\times\hat{\imath}')] = -m\omega^2x\hat{\imath}'$
      - $2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' = 2m(\omega\hat{k}')\times(\dot{x}\hat{\imath}') = 2m\omega\dot{x}\hat{\jmath}'$
      - $m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{0}$
   9) Escribir 2da Ley de Newton para SRNI: $m\ddot{x}\hat{\imath}' = N\hat{\jmath}' - (-m\omega^2x\hat{\imath}') - 2m\omega\dot{x}\hat{\jmath}'$
   10) Resolver el problema: Separamos en ecuaciones escalares

$$\hat{\imath}' : m\ddot{x} = m\omega^2x \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2x = 0$$

$$\hat{\jmath}' : N = 2m\omega\dot{x}$$

Resolvemos la EDO lineal a coeficientes constantes de $\hat{\imath}'$ usando polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega \Rightarrow x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Con condición inicial $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Evaluando:

$$x(0) = A + B = x_0 \Rightarrow B = x_0 - A$$

$$\dot{x}(0) = \omega(A-B) = \omega(A-x_0+A) = 2\omega A - \omega x_0 = v_0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(x_0+\frac{v_0}{\omega}\right) \Rightarrow B = \frac{1}{2}\left(x_0-\frac{v_0}{\omega}\right)$$

Obtenemos la posición del anillo en función del tiempo:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{-\omega t}}$$

b) La velocidad del anillo en función del tiempo es:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}(\omega x_0 + v_0)e^{\omega t} - \frac{1}{2}(\omega x_0 - v_0)e^{-\omega t}$$

Reemplazando en la expresión para la fuerza normal de la ecuación en $\hat{j}'$:

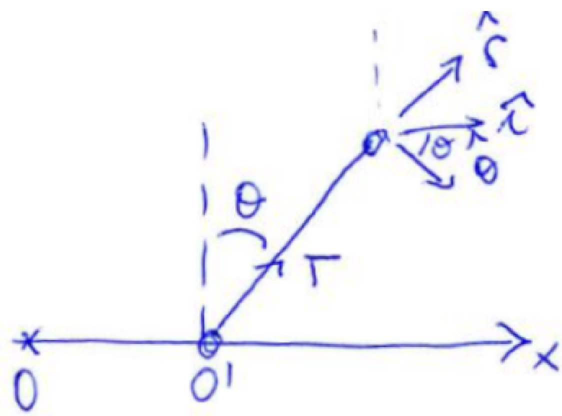
$$\boxed{N(t) = (m\omega^2 x_0 + m\omega v_0)e^{\omega t} - (m\omega^2 x_0 - m\omega v_0)e^{-\omega t}}$$

c) Para que la partícula esté infinitalmente cerca del centro de rotación cuando $t \to \infty$, debemos imponer que $x(t)$ sea estrictamente decreciente. Con esto, el término creciente debe ser nulo:

$$\frac{1}{2}\left(L + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{\omega t} \equiv 0 \Rightarrow \boxed{v_0 = -L\omega}$$

2. Notamos que en este problema $\vec{\Omega} = \vec{0}$, con lo que sólo tendremos la fuerza ficticia traslacional, $m\vec{A}$

a) Adoptamos un enfoque diferente al de los '10 pasos'. Se tiene que en el sistema S de origen O:



$$\boxed{\sum F_x = T\text{sen}\theta = m\ddot{x}} \quad (1)$$

b) Separamos la fuerza en componentes escalares, considerando la corrección no inercial, $m\vec{A}$:

$$\hat{r} : -mL\dot{\theta}^2 = -T - m\vec{A}\cdot\hat{r}$$
$$\hat{\theta} : mL\ddot{\theta} = -m\vec{A}\cdot\hat{\theta}$$

Observamos que como el radio vector $\overrightarrow{OO'}$, $\vec{R} = x\hat{i} \Rightarrow \vec{A} = \ddot{x}\hat{i}$. Por geometría: $\hat{i} = \text{sen}\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}$

$$\vec{A}\cdot\hat{r} = \ddot{x}\text{sen}\theta$$
$$\vec{A}\cdot\hat{\theta} = \ddot{x}\cos\theta$$

Reemplazando las componentes de la fuerza ficticia traslacional en las ecuaciones escalares:

$$\boxed{mL\dot{\theta}^2 = T + m\ddot{x}\text{sen}\theta} \quad (2)$$

$$\boxed{mL\ddot{\theta} = -m\ddot{x}\cos\theta} \quad (3)$$

c) Juntando la información de las ecuaciones anteriores:

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow mL\dot{\theta}^2 = T(1 + \text{sen}^2\theta) \quad (4)$$

$$(1) \text{ y } (3) \Rightarrow mL\ddot{\theta} = -T\text{sen}\theta\cos\theta \quad (5)$$

$$(4) \text{ y } (5) \Rightarrow \boxed{mL\ddot{\theta} = -\frac{mL\dot{\theta}^2}{1+\text{sen}^2\theta}\text{sen}\theta\cos\theta} \quad (6)$$

d) Reescribimos la ecuación (6):

$$\ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{1+\text{sen}^2\theta}$$

Usamos el truco de la derivada temporal, notando que:

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

Integramos, considerando condiciones iniciales $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = v_0/L$:

$$\int_{v_0/L}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2} = -\int_0^{\theta} \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{1+\text{sen}^2\theta} d\theta$$

$$\ln\left(\frac{\dot{\theta}^2}{(v_0/L)^2}\right) = \ln\left(\frac{1+\text{sen}^2 0}{1+\text{sen}^2\theta}\right)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{(v_0/L)^2}{1+\text{sen}^2\theta} \quad (7)$$

Con lo que encontramos los valores críticos de la velocidad angular:

$$\boxed{\dot{\theta}_{max} = \frac{v_0}{L} \quad ; \quad \theta = 0, \pi}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_{min} = \frac{v_0}{\sqrt{2}L} \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$$

Reemplazando (7) en (4):

$$T(\theta) = \frac{mv_0^2}{L}\frac{1}{(1+\text{sen}^2\theta)^2}$$

Con lo que encontramos los valores críticos de la tensión:

$$\boxed{T_{max} = \frac{mv_0^2}{L} \quad ; \quad \theta = 0, \pi}$$

$$\boxed{T_{min} = \frac{mv_0^2}{4L} \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$$