Pauta Control 2

Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliares: Jerónimo Herrera G. - Rodrigo Catalán B.
Ayudantes: Gerald Barnert S. - Diana Escobar C.

P1.-

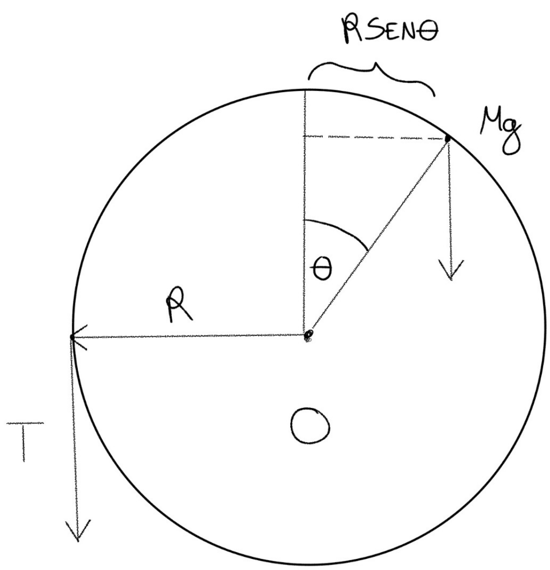
i) El momento de inercia de la barra lo podemos calcular con el teorema de Steiner:

$$I_O = I_{cm} + MR^2 \quad \textbf{(+1 pt)}$$

El momento de inercia de una barra uniforme de masa M y largo L con respecto a su centro de masa es conocido. El cálculo explícito se encuentra en la P1 de la Pauta de la Auxiliar #18:

$$\boxed{I_O = \frac{1}{12}ML^2 + MR^2} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

ii) Hacemos suma de torques, teniendo en cuenta que como θ crece en sentido horario, usamos la regla de la mano IZQUIERDA (hacia afuera de la página es negativo, hacia dentro es positivo):



$$\sum \tau_i = -RT + MgR\text{sen}\theta = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{RT}{I_O} + \frac{MgR}{I_O}\text{sen}\theta \quad \textbf{(+1 pt)}$$

La condición de desenrollar es equivalente a rodar sin resbalar:

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{R^2T}{I_O} + \frac{MgR^2}{I_O}\text{sen}\theta \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Para despejar la tensión, hacemos suma de fuerzas:

$$\sum F_y = T - Mg = M\ddot{y} \Rightarrow T = Mg + M\ddot{y} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Reemplazando en la expresión para la aceleración de la masa que cuelga:

$$\ddot{y} = -\frac{R^2}{I_O}(Mg + M\ddot{y}) + \frac{MgR^2}{I_O}\text{sen}\theta$$

Reordenando, encontramos la aceleración de la masa M:

$$\boxed{\ddot{y}(\theta) = \frac{MR^2}{I_O + MR^2}g(\text{sen}\theta - 1)} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

<u>Anexo:</u> Calculemos el momento de inercia de la barra con respecto a su centro de masa:

$$I = \int r^2 dm$$

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{L}dx$$

$$I_{cm} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{3L}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{-L}{2}\right)^3\right)$$

$$I_{cm} = \frac{M}{3L}\frac{2L^3}{8} = \frac{1}{12}ML^2$$

P2.-

i) La velocidad inicial de la nave espacial mientras se encuentra en la órbita circular es:

$$\vec{v}_i = v_i\hat{\theta} \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Aplicamos la 2da Ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal para un MCU:

$$F_g = ma_c \Rightarrow -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{mv_i^2}{R} \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Con esto, la energía mecánica inicial de la nave en la órbita circular es:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R} \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

La velocidad final de la nave luego del impulso tangencial es:

$$\vec{v}_f = v_f\hat{\theta} = \beta v_i\hat{\theta} \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

La energía final de la nave en la órbita parabólica es:

$$E_f = 0 \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Con lo que la variación de energía es:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{GMm}{2R} \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Por otro lado, la variación de energía se puede escribir como:

$$\Delta E = K_f + U_f - (K_i + U_i) \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Como el impulso es casi instantáneo podemos suponer que no cambia la posición, $\Delta U = 0$:

$$\Delta E = K_f - K_i = \frac{1}{2}m\beta^2 v_i^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{GMm}{2R}(\beta^2 - 1) \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Igualando ambas expresiones para el cambio de energía:

$$\frac{GMm}{2R} = \frac{GMm}{2R}(\beta^2 - 1) \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

Encontramos el valor de β:

$$\beta^2 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \sqrt{2}} \quad \textbf{(+0,2 pts)}$$

ii) Si el impulso es radial, la velocidad final queda:

$$\vec{v}_f = v_i\hat{\theta} + v_r\hat{r} \quad \textbf{(+0,3 pts)}$$

Se cumple que:

$$||\vec{v}_f|| = v_f = \sqrt{v_i^2 + v_r^2} = \beta v_i \quad \textbf{(+0,3 pts)}$$

Con lo que el balance energético queda igual. Análogamente, si el impulso es normal:

$$\vec{v}_f = v_i\hat{\theta} + v_z\hat{k} \quad \textbf{(+0,3 pts)}$$

$$||\vec{v}_f|| = v_f = \sqrt{v_i^2 + v_z^2} = \beta v_i \quad \textbf{(+0,3 pts)}$$

En consecuencia, no cambia el valor de β. Esto se explica en que el cambio de energía orbital es el mismo, independientemente de la dirección del impulso. **(+0,3 pts)**

iii) Si el impulso es radial, se conserva el momentum angular:

$$l_f = l_i = l = mRv_i = \sqrt{GMm^2R} \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

La energía de la órbita parabólica es cero:

$$E_f = 0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

Reemplazando el valor del momentum angular:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{GMm^2R}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = 0 \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

El radio mínimo se alcanza cuando $\dot{r} = 0$ **(+0,5 pts)**:

$$\frac{GMmR}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$\frac{R}{2r^2} - \frac{1}{r} = 0$$

$$\frac{R}{2r} = 1$$

Finalmente:

$$\boxed{r_{min} = \frac{R}{2}} \quad \textbf{(+0,5 pts)}$$

$\boxed{\textbf{P3}.\text{-}}$

i) El potencial efectivo es:

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + Kr^4 \quad \textbf{(+1 pt)}$$

La condición que determina el radio de equilibrio es:

$$V'_{ef}(a) = 0 = -\frac{l^2}{ma^3} + 4Ka^3 \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{4Kma^6}} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

La energía en una órbita circular es:

$$E = V_{ef}(a) = \frac{l^2}{2ma^2} + Ka^4 = \frac{4Kma^6}{2ma^2} + Ka^4$$

$$\boxed{E = 2Ka^4 + Ka^4 = 3Ka^4} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

ii) La frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{V''_{ef}(a)}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''_{ef}(a)}} \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Con:

$$V''_{ef}(a) = \frac{3l^2}{ma^4} + 12Ka^2 = \frac{3(4Kma^6)}{ma^4} + 12Ka^2$$

$$V''_{ef}(a) = 12Ka^2 + 12Ka^2 = 24Ka^2 \quad \textbf{(+1 pt)}$$

Con esto, el periodo de pequeñas oscilaciones radiales es:

$$\boxed{T = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{6K}}} \quad \textbf{(+1 pt)}$$