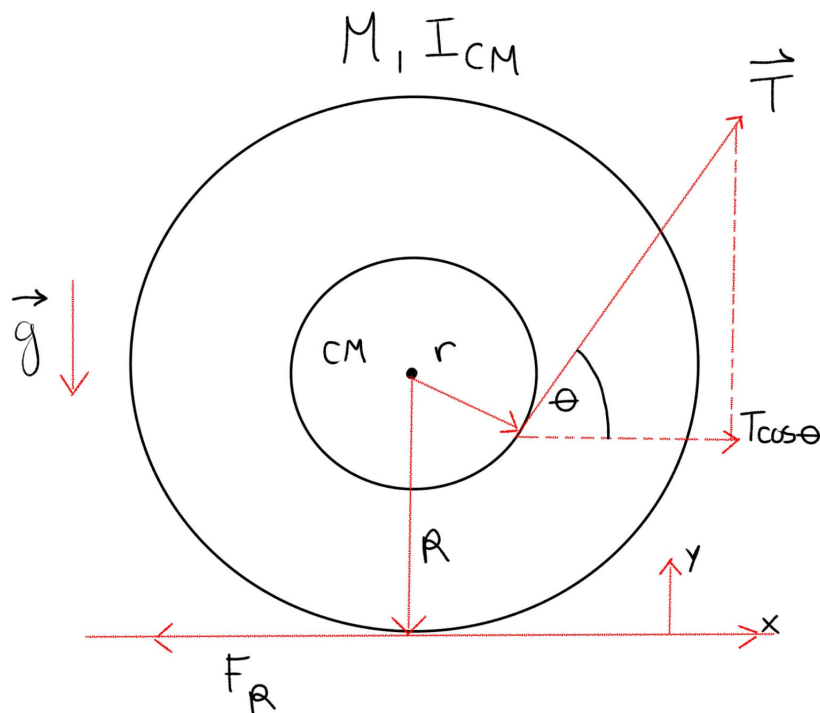


FI2001-6: Mecánica**Profesor:** Claudio Romero Z.**Auxiliar:** Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 20

1. Considerando el sistema de coordenadas cartesianas, podemos hacer las ecuaciones de fuerzas y torques como siguen, considerando a $\vec{F}_R$ como la fuerza de roce, $\vec{a}$ como la aceleración del centro de masa y $\vec{\alpha}$ como la aceleración angular. La ecuación de fuerza (2da Ley de Newton) es:

$$\vec{F} = M\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_R$$



La dinámica relevante ocurre en el eje x :

$$Ma_x = T \cos \theta - F_R \quad (1)$$

La suma de torques, usando la regla de la mano derecha, es:

$$\tau = I_{cm} \alpha = rT - RF_R \quad (2)$$

La condición de rodar sin resbalar nos dice que:

$$a_x = R\alpha$$

Usando esto, y juntando las ecuaciones (1) y (2):

$$RF_R = -\frac{I_{cm}}{R}a_x + rT \Rightarrow F_R = -\frac{I_{cm}}{R^2}a_x + \frac{r}{R}T \quad (3)$$

Volviendo a (1) e insertando (3):

$$Ma_x = T\cos\theta + \frac{I_{cm}}{R^2}a_x - \frac{r}{R}T$$

$$a_x \left(M - \frac{I_{cm}}{R^2} \right) = T\cos\theta - \frac{r}{R}T \quad (4)$$

Suponiendo que el momento de inercia I_{cm} es el de un cilindro uniforme de masa M y radio R :

$$M - \frac{I_{cm}}{R^2} = M - \frac{1}{R^2} \frac{1}{2} MR^2 = \frac{M}{2} > 0$$

El signo de la aceleración a_x depende exclusivamente del valor del lado derecho de la ecuación (4):

$$a_x < 0 \Rightarrow T\cos\theta - \frac{r}{R}T < 0 \quad (\theta \text{ pequeño})$$

$$a_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta - \frac{r}{R}T = 0 \quad (\theta = \theta_c \text{ crítico})$$

$$a_x > 0 \Rightarrow T\cos\theta - \frac{r}{R}T > 0 \quad (\theta \text{ grande})$$

Estudiando en detalle la ecuación (4), encontramos el ángulo crítico:

$$T\cos\theta - \frac{r}{R}T = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{r}{R} \Rightarrow \theta_c = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$$

2. a) El sistema, de masa $M = 2m$ se suelta del reposo cuando $\theta_0 = \pi/3$. Como no hay fuerza de roce ($\mu = 0$, el alambre resbala), la energía mecánica se conserva. Escribimos la energía final (en θ):

$$E_f = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + Mgh_G$$

Donde v_G es la rapidez del centro de masa G , I_G es el momento de inercia con respecto a G y h_G es la altura de G . Notamos que no hay fuerzas horizontales. Con esto:

$$\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \dot{x}_G = cte$$

Además, sabemos que el sistema parte del reposo:

$$v_G(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}_G(0) = \dot{x}_G(t) = 0$$

Con lo que podemos escribir la velocidad del centro de masas exclusivamente en el eje vertical:

$$v_G = \dot{y}_G$$

Donde y_G no es otra cosa que la altura del centro de masa. La calculamos usando geometría, notando que G se encuentra a medio camino entre las dos masas. Así obtenemos h_G y v_G :

$$y_G = h_G = R + \frac{R}{2} \cos \theta \Rightarrow \dot{y}_G = v_G = -\frac{R}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

Por definición, el momento de inercia del sistema con respecto a su centro de masa es:

$$I_G = \sum_i m r_{Gi}^2 = m \left(\frac{R}{2} \right)^2 + m \left(\frac{R}{2} \right)^2 = 2m \frac{1}{4} R^2 = \frac{1}{4} M R^2$$

Inicialmente, teníamos que $\theta_0 = \pi/3$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $v_G(0) = 0$. La energía inicial es:

$$E_i = Mg \left(R + \frac{R}{2} \cos(\pi/3) \right) = \frac{5}{4} MgR$$

Igualemos a la energía final $E_i = E_f$ y escribimos la expresión para E_f :

$$\frac{5}{4} MgR = \frac{1}{2} \frac{1}{4} M R^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + MgR \left(1 + \frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

Que es una ecuación de primer grado con una incógnita en $\dot{\theta}^2$. Su resolución es:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(1 - 2\cos\theta)}{R(\sin^2\theta + 1)}$$

b) En primer lugar, derivamos con respecto al tiempo la expresión anterior para encontrar $\ddot{\theta}$:

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta}^2 = 2\dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{2g}{R} \frac{2\sin\theta(\sin^2\theta + 1) - 2\sin\theta\cos\theta(1 - 2\cos\theta)}{(\sin^2\theta + 1)^2} \dot{\theta}$$

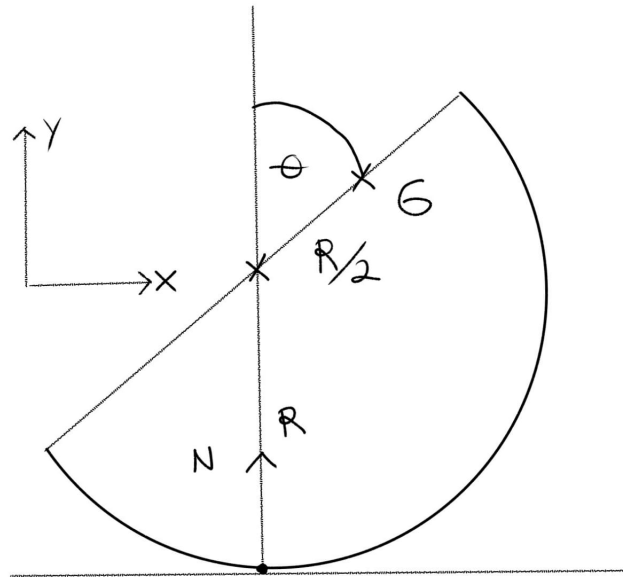
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \frac{2\sin\theta(\sin^2\theta + 1) - 2\sin\theta\cos\theta(1 - 2\cos\theta)}{(\sin^2\theta + 1)^2}$$

A continuación, veamos los torques con respecto al centro de masa. En primer lugar, el peso no hace torque, ya que tiene brazo de palanca nulo. La única fuerza que hace torque es la normal:

$$\vec{\tau}_G = \vec{b} \times (N\hat{j})$$

El brazo de palanca de la fuerza normal es (ver figura de abajo):

$$\vec{b} = -\frac{R}{2} \sin\theta \hat{i} - \frac{R}{2} \cos\theta \hat{j} - R\hat{j}$$



Con esto, la ecuación de torque nos queda:

$$\vec{\tau}_G = I_G \ddot{\theta} \hat{k} = \frac{1}{4} M R^2 \ddot{\theta} \hat{k} = -\frac{RN}{2} \sin \theta \hat{k}$$

Finalmente, despejamos la normal:

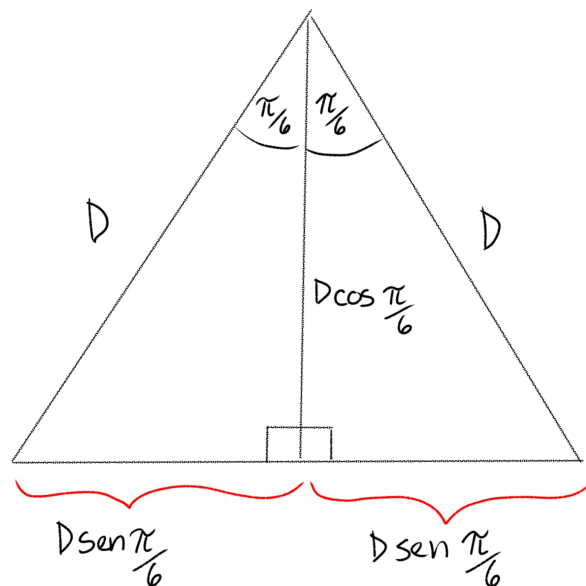
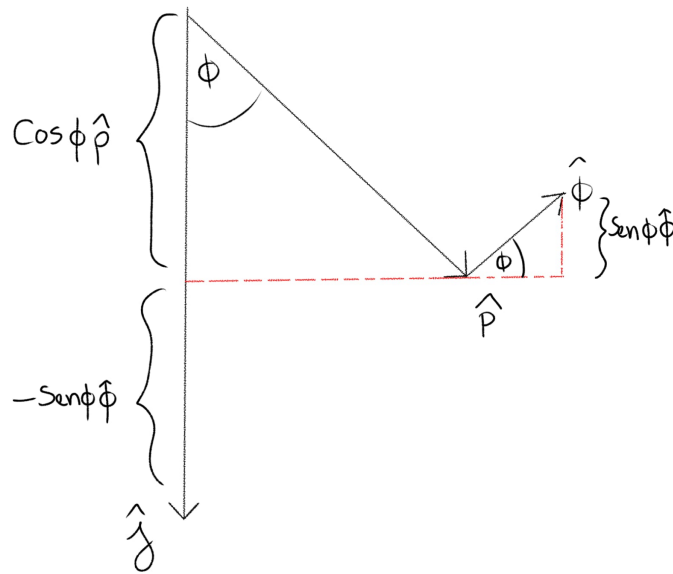
$$N = Mg \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos \theta (1 - 2 \cos \theta)}{(\sin^2 \theta + 1)^2}$$

3. a) Usaremos las coordenadas definidas por el dibujo. Podemos descomponer $\vec{g}$ (ver diagrama vectorial) y escribir la posición de las masas 1 y 2 desde el origen O (ver dibujo triángulo equilátero):

$$\vec{g} = g(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi})$$

$$\vec{r}_{1O} = \frac{\sqrt{3}}{2}D\hat{\rho} - \frac{1}{2}D\hat{\phi}$$

$$\vec{r}_{2O} = \frac{\sqrt{3}}{2}D\hat{\rho} + \frac{1}{2}D\hat{\phi}$$



También será necesario determinar la posición del centro de masa G (fácil: es el punto medio entre las masas 1 y 2) y la posición de cada partícula vista desde G como origen:

$$\vec{r}_G = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\rho}$$

$$\vec{r}_{1G} = -\frac{D}{2}\hat{\phi}$$

$$\vec{r}_{2G} = \frac{D}{2}\hat{\phi}$$

Para calcular los momenta angulares también requerimos saber las velocidades $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$:

$$\vec{v}_{1O} = \frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}\hat{\phi} + \frac{1}{2}D\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\vec{v}_{2O} = \frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}\hat{\phi} - \frac{1}{2}D\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\vec{v}_G = \frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}$$

$$\vec{v}_{1G} = \frac{D}{2}\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\vec{v}_{2G} = -\frac{D}{2}\dot{\phi}\hat{\rho}$$

Pasamos al cálculo de $\vec{l}_O$, $\vec{l}_O^{(G)}$ y $\vec{l}_G$:

$$\vec{l}_O = \sum m\vec{r}_{iO} \times \vec{v}_{iO}$$

$$\vec{l}_O = m \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}D\hat{\rho} - \frac{1}{2}D\hat{\phi} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}\hat{\phi} + \frac{1}{2}D\dot{\phi}\hat{\rho} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D\hat{\rho} + \frac{1}{2}D\hat{\phi} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}\hat{\phi} - \frac{1}{2}D\dot{\phi}\hat{\rho} \right) \right]$$

$$\boxed{\vec{l}_O = 2mD^2\dot{\phi}\hat{k}}$$

$$\vec{l}_O^{(G)} = 2m\vec{r}_G \times \vec{v}_G = 2m \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D\hat{\rho} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}\hat{\phi} \right)$$

$$\boxed{\vec{l}_O^{(G)} = \frac{3}{2}mD^2\dot{\phi}\hat{k}}$$

$$\vec{l}_G = \sum m\vec{r}_{iG} \times \vec{v}_{iG} = m \left[\left(-\frac{D}{2}\hat{\phi} \right) \times \left(\frac{D}{2}\dot{\phi}\hat{\rho} \right) + \left(\frac{D}{2}\hat{\phi} \right) \times \left(-\frac{D}{2}\dot{\phi}\hat{\rho} \right) \right]$$

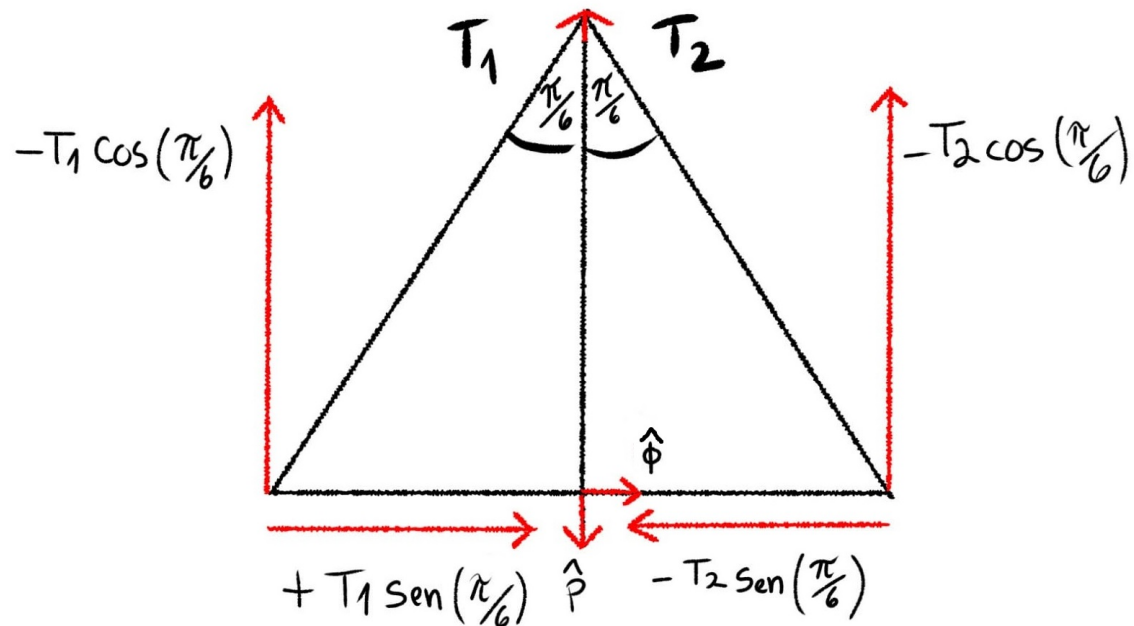
$$\boxed{\vec{l}_G = \frac{1}{2}mD\dot{\phi}\hat{k}}$$

Observación: la relación entre los tres vectores es

$$\vec{l}_O = \vec{l}_O^{(G)} + \vec{l}_G$$

Por lo que el enunciado nos forzaba a calcular los tres momentos angulares de forma independiente.

- b) La tensión de la barra que une las masas 1 y 2 es una fuerza interna y no afecta a la dinámica. Nos falta determinar las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$:



$$\vec{T}_1 = -T_1 \cos(\pi/6) \hat{\rho} + T_1 \sin(\pi/6) \hat{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} T_1 \hat{\rho} + \frac{1}{2} T_1 \hat{\phi}$$

$$\vec{T}_2 = -T_2 \cos(\pi/6) \hat{\rho} - T_2 \sin(\pi/6) \hat{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} T_2 \hat{\rho} - \frac{1}{2} T_2 \hat{\phi}$$

Los torques son:

$$\vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_O^{(G)} = \vec{r}_G \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau}_G = \sum \vec{r}_{iG} \times \vec{F}_i$$

Donde las fuerzas sobre cada partícula y total son, respectivamente:

$$\vec{F}_i = m \vec{g} + \vec{T}_i$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2m \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

Con esto, los torques $\vec{\tau}_O$, $\vec{\tau}_O^{(G)}$ y $\vec{\tau}_G$ resultan:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{1O} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{2O} \times \vec{F}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho} - \frac{1}{2} D \hat{\phi} \right) \times \left(mg(\cos\phi \hat{\rho} - \sin\phi \hat{\phi}) - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 \hat{\rho} + \frac{1}{2} T_1 \hat{\phi} \right) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho} + \frac{1}{2} D \hat{\phi} \right) \times \left(mg(\cos\phi \hat{\rho} - \sin\phi \hat{\phi}) - \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 \hat{\rho} - \frac{1}{2} T_2 \hat{\phi} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O = -\sqrt{3} D m g \sin\phi \hat{k}}$$

$$\vec{\tau}_O^{(G)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho} \right) \times (2m \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2)$$

$$\vec{\tau}_O^{(G)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} D \hat{\rho} \right) \times \left[2mg(\cos\phi \hat{\rho} - \sin\phi \hat{\phi}) - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 \hat{\rho} + \frac{1}{2} T_1 \hat{\phi} - \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 \hat{\rho} - \frac{1}{2} T_2 \hat{\phi} \right]$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O^{(G)} = \left(-\sqrt{3} D m g \sin\phi + \frac{\sqrt{3}}{4} (T_1 - T_2) \right) \hat{k}}$$

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_{1G} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{2G} \times \vec{F}_2$$

$$\vec{\tau}_G = \left(-\frac{D}{2} \hat{\phi} \right) \times (m \vec{g} + \vec{T}_1) + \left(\frac{D}{2} \hat{\phi} \right) \times (m \vec{g} + \vec{T}_2)$$

$$\boxed{\vec{\tau}_G = \frac{\sqrt{3}}{4} D (T_2 - T_1) \hat{k}}$$

Observación: nuevamente, la relación existente entre los tres vectores es

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O^{(G)} + \vec{\tau}_G$$

Por lo que el enunciado nos prohibía usar este hecho para calcular alguno de los torques. Haciendo ecuación de torque para cada caso:

$$(1) \quad \dot{\vec{l}}_O = \vec{\tau}_O \Rightarrow \boxed{2mD^2\ddot{\phi} = -\sqrt{3}Dmg\sin\phi}$$

$$(2) \quad \dot{\vec{l}}_O^{(G)} = \vec{\tau}_O^{(G)} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}mD^2\ddot{\phi} = -\sqrt{3}Dmg\sin\phi + \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_1 - T_2)}$$

$$(3) \quad \dot{\vec{l}}_G = \vec{\tau}_G \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mD^2\ddot{\phi} = \frac{\sqrt{3}}{4}D(T_2 - T_1)}$$

c) Si tomamos la ecuación (3) y la multiplicamos por 4, obtenemos (1):

$$\sqrt{3}D(T_2 - T_1) = -\sqrt{3}Dmg\sin\phi \Rightarrow \boxed{T_1 - T_2 = mg\sin\phi}$$

Esta condición supone que las barras son ideales y conducen la tensión instantáneamente.

d) Usando (2) y (3) se llega a (1). Integramos la ecuación de movimiento con *el truco* :

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{g}{D} \sin\phi$$

Recordamos las condiciones iniciales para los límites de integración: $\dot{\phi}(0) = 0$, $\phi(0) = \phi_0$

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi} d\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{3}g}{2D} \int_{\phi_0}^{\phi} \sin\phi d\phi \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{\sqrt{3}g}{2D}(-\cos\phi) \Bigg|_{\phi_0}^{\phi}$$

$$\boxed{\dot{\phi}^2 = \frac{\sqrt{3}g}{D}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

e) La 2da Ley de Newton para el centro de masa es:

$$\vec{F} = M\vec{A}_G$$

Con $M = 2m$ la masa del sistema. Derivamos para encontrar la aceleración del centro de masa:

$$\vec{A}_G = \ddot{\vec{r}}_G = -\frac{\sqrt{3}}{2}D\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{\sqrt{3}}{2}D\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

Ya habíamos calculado la fuerza neta, $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + 2m\vec{g}$, reemplazamos en la 2da Ley:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}2mD\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{\sqrt{3}}{2}2mD\ddot{\phi}\hat{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2}T_1\hat{\rho} + \frac{1}{2}T_1\hat{\phi} - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2\hat{\rho} - \frac{1}{2}T_2\hat{\phi} + 2mg(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi})$$

Separando en ecuaciones escalares:

$$\hat{\rho} : -\frac{\sqrt{3}}{2}(T_1 + T_2) + 2mg\cos\phi = -\sqrt{3}mD\dot{\phi}^2$$

$$\hat{\phi} : \frac{1}{2}(T_1 - T_2) - 2mg\sin\phi = \sqrt{3}mD\ddot{\phi}$$

La ecuación en $\hat{\phi}$ es equivalente a la ecuación de torque $\vec{\tau}_O^{(G)}$. Si miramos la parte (d) podemos reemplazar $\dot{\phi}^2$ en la ecuación en $\hat{\rho}$ y junto con la condición de la parte (c), tenemos un sistema de ecuaciones para las tensiones T_1 y T_2 :

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= mg\sin\phi \\ T_1 + T_2 &= \frac{4\sqrt{3}}{3}mg\cos\phi + 2\sqrt{3}mg(\cos\phi - \cos\phi_0) \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, despejamos T_1 y por ende, T_2 :

$$T_1 = \frac{1}{2}mg\sin\phi + \frac{5\sqrt{3}}{3}mg\cos\phi - \sqrt{3}mg\cos\phi_0$$

$$T_2 = -\frac{1}{2}mg\sin\phi + \frac{5\sqrt{3}}{3}mg\cos\phi - \sqrt{3}mg\cos\phi_0$$

Suponiendo que las barras transmiten la tensión instantáneamente, la reacción en O debe ser:

$$\boxed{\vec{F}_T = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2}$$

Con $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ ya expresadas en la parte (b) en función de sus módulos, y éstos recién calculados.