Auxiliar Extra C2 #1

12/05

P1// Sabemos que para órbitas parabólicas, $E = 0$. Ahora buscamos la energía para la órbita elíptica, que estará dada por:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Tanto en A como en B se tiene que $\dot{r} = 0$, teniendo así, por conservación de energía en la órbita elíptica:

$$E = U_{eff}(r = D) = U_{eff}(r = R)$$

1) $E = \frac{\ell^2}{2mD^2} - \frac{GMm}{D} \Rightarrow ED^2 = \frac{\ell^2}{2m} - GMmD$

2) $E = \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} \Rightarrow ER^2 = \frac{\ell^2}{2m} - GMmR$

Haciendo ① - ②:

$$E(D^2 - R^2) = GMm(R - D) \Rightarrow E = -\frac{GMm}{R + D}$$

Luego, como la energía de la órbita parabólica era 0, la diferencia de energía será la ya obtenida.

P2// Si se pregunta por periodos de rotación, inmediatamente se recuerda la tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3}$$

Para determinar el semieje mayor a, recordamos la expresión:

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

Para la elipse se tiene:

$$a = 4R_T \Rightarrow T = 16\pi\sqrt{\frac{2R_T^3}{GM}}$$

Y para la órbita circular:

$$a = 2R_T \rightarrow T = 4\pi\sqrt{\frac{2R_T^3}{GM}}$$

Los radios mínimo y máximo se obtienen reemplazando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ respectivamente en la expresión dada:

$$r_{min} = r(\theta = 0) = \frac{R}{1+e} \quad \wedge \quad r_{max} = r(\theta = \pi) = \frac{R}{1-e}$$

De aquí se desprende:

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

Para la elipse:

$$e = {}^{4R_T}/8R_T = \frac{1}{2}$$

Y para la órbita circular:

$$e = 0$$

ii) Como se conserva el momento angular, para la energía se tiene:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Y se conserva en ambas órbitas. Para la órbita elíptica, notemos que en los radios mínimo y máximo $\dot{r} = 0$, tq:

$$E(r_{min}) = E(r_{max}) \Rightarrow \frac{l^2}{2m \cdot 4R_T^2} - \frac{GMm}{2R_T} = \frac{l^2}{2m \cdot 36R_T^2} - \frac{GMm}{6R_T}$$

De aquí despejamos l^2:

$$\frac{l^2}{mR_T^2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{72}\right) = \frac{GMm}{R_T}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

$$l^2 = 9mR_T \cdot GMm \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow l^2 = 3GMm^2R_T$$

La energía resulta reemplazando l^2 en cualquiera de las expresiones obtenidas anteriormente.

$$E = \frac{3GMm^{\cancel{2}}\cancel{R_T}}{8\cancel{m}R_T^{\cancel{2}}} - \frac{GMm}{2R_T} = -\frac{GMm}{8R_T}$$

Para la órbita circular (donde siempre $\dot{r} = 0$) la energía será:

$$E = \frac{\ell^2}{2m(2R_T)^2} - \frac{GMm}{2R_T}$$

Volvamos a la expresión para cónicas, tomando $e=0$ y $r(\theta) = 2R_T$ cte, tq:

$$2R_T = R$$

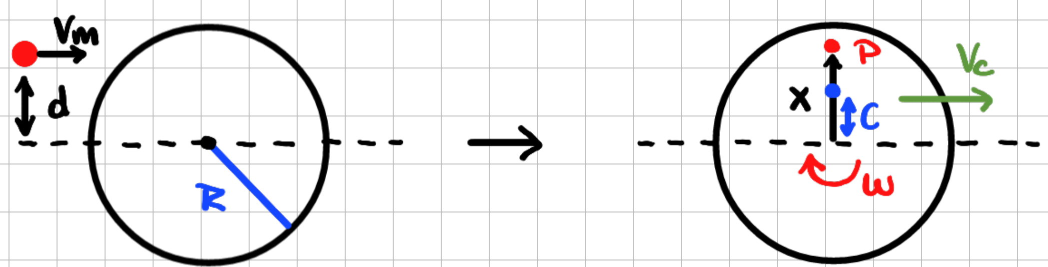
¿Pero qué era R? En el auxiliar 9 se tiene una expresión ($R = \ell^2/GMm^2$) de donde despejamos ℓ^2:

$$\ell^2 = 2GMm^2R_T$$

Y así la energía resulta:

$$E = \frac{2GMm^2 \cancel{R_T}}{8\cancel{m}R_T^{\cancel{2}}} - \frac{GMm}{2R_T} = -\frac{GMm}{4R_T}$$

P3// Como el sistema es aislado, se conserva tanto momento angular como momento lineal.



Sea v_c la velocidad del centro de masa luego de la colisión. Así:

$$mv_m = (m+M)V_c$$

Donde V_c es la velocidad del centro de masa, a una distancia C del centro, tq:

$$C = \frac{md}{m+M}$$

El momento angular inicial es 0 (respecto a P), y el final es la suma del momento angular debido a la rotación del disco en torno a su centro y el momento angular debido a la rotación de este respecto a P.

La velocidad del centro del disco es la velocidad del centro de masa más su velocidad de rotación respecto a este mismo:

* Después un análisis más a fondo

$$l_i = l_f \quad \rightarrow \quad 0 = -I\omega + Md(V_c - \omega C)$$

$$\omega = \frac{MdV_c}{I + MdC} = \frac{(m+M)MdV_c}{I(m+M) + Mmd^2}$$

Despejando V_c de la primera ecuación y reemplazando en la segunda se encuentra la velocidad angular:

$$V_c = \frac{m v_m}{m+M} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\cancel{(m+M)}Md}{I(m+M)+Mmd^2} \cdot \frac{m v_m}{\cancel{m+M}}$$

$$\omega = \frac{mMd v_m}{I(m+M)+Mmd^2} = \frac{md v_m}{\frac{R^2}{2}(m+M)+md^2}$$

* Consideramos que la masa m no afecta al momento de inercia del disco.

* El por qué de que el momento angular final sea eso se puede entender mediante lo siguiente sacado de la página 186 del apunte de Cordero.

8.1.2. Momento angular

En §2.2 también se definió el momento angular total del sistema y se vió que obedece la ecuación

$$\frac{d\vec{\ell}_{\mathcal{O}}}{dt} = \sum_a \vec{r}_a \times f_a^{\text{ext}} \tag{8.1.4}$$

Hasta aquí se ha trabajado sólo con un sistema inercial S.

También se define el momento angular con respecto a centro de masa G

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_G &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \vec{v}_a \\ &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

y el momento angular de la masa total ubicada en el centro de masa

$$\vec{\ell_{\mathcal{O}}}^G = M\vec{R}_G \times \vec{V}_G \tag{8.1.6}$$

de modo que se cumple que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}} = \vec{\ell_{\mathcal{O}}}^G + \vec{\ell}_G \tag{8.1.7}$$

En nuestro caso $\vec{l}_0$ es el momento angular final respecto al punto de impacto, es decir l_f.

$\vec{l}_0^G$ el disco respecto al eje, es decir, $L = -I\omega$ (negativo pues la rotación es en sentido horario)

$\vec{l}_G$ respecto al centro de masa, que en este caso es $Md(V_c - \omega C)$