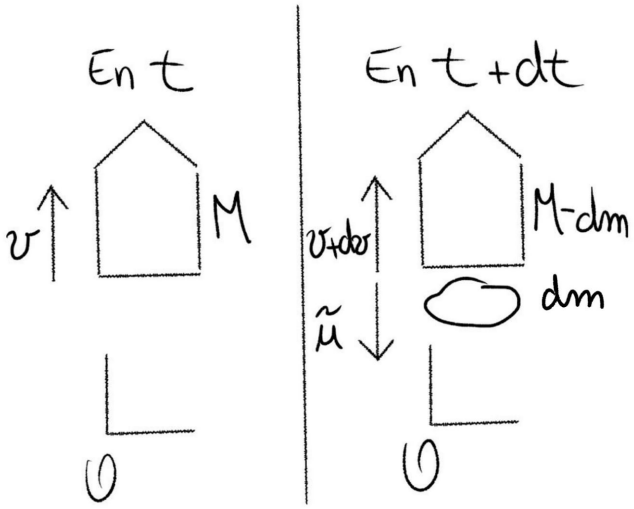
FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 15

1. *a)* Esquemáticamente, tenemos la siguiente situación:



Donde $\tilde{u}$ y v son las rapideces medidas en el sistema de referencia inercial de origen $\mathcal{O}$. Veamos el momentum lineal (en el eje Z) antes (tiempo t) y después (tiempo $t + dt$):

$$p_i = Mv \tag{1}$$

$$p_f = (M - dm)(v + dv) - dm\tilde{u} = Mv - dmv + Mdv - dmdv - dm\tilde{u} \tag{2}$$

Donde la multiplicación de dos diferenciales se considera muy pequeña, $dmdv = 0$. Usando las ecuaciones (1) y (2), calculamos el impulso sobre el cohete:

$$\Delta p = p_f - p_i = Mv - dmv + Mdv - dm\tilde{u} - Mv = Mdv - (\tilde{u} + v)dm \tag{3}$$

Luego, la derivada del momentum lineal con respecto al tiempo es:

$$\frac{dp}{dt} = M\frac{dv}{dt} - (\tilde{u} + v)\frac{dm}{dt} \tag{4}$$

Notamos que $\tilde{u} + v$ corresponde a la rapidez del combustible con respecto al cohete:

$$\tilde{u} + v = u \tag{5}$$

Usando (5) en (4):

$$\frac{dp}{dt} = M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} \tag{6}$$

Usando (6) y la forma general de la Segunda Ley de Newton:

$$\frac{dp}{dt} = F = -Mg$$

$$M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} = -Mg \tag{7}$$

Por conservación de la masa, se tiene que:

$$M_0 = M(t) + m(t)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$0 = \frac{dM}{dt} + \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt} \tag{8}$$

Usando (8) en (7):

$$M\frac{dv}{dt} + u\frac{dM}{dt} = -Mg$$

Así obtenemos la ecuación de movimiento para el cohete:

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} - Mg \tag{9}$$

De (9) notamos que la condición para el despegue es:

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} - Mg \geq 0 \Rightarrow \boxed{-u\frac{dM}{dt} \geq Mg}$$

Luego, el valor mínimo de $|udM/dt|$ para que el cohete despegue en $t = 0$ es:

$$\left| u\frac{dM}{dt} \right|_{min} = M_0 g$$

b) Reescribimos (9) e integramos:

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt}\frac{1}{M} - g$$

$$v - v_0 = -u\ln\left|\frac{M(t)}{M(0)}\right| - gt \tag{10}$$

Con $v_0 = 0$ ya que el cohete parte del reposo. Como las masas son siempre positivas:

$$\boxed{v(t) = -u\ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) - gt} \tag{11}$$

c) Suponemos $|dM/dt| = \alpha$. Como el cohete pierde masa, $dM/dt = -\alpha$.
Integramos asumiendo que M_c es la masa inicial de combustible:

$$M(t) - M_0 = -\alpha t$$

Imponiendo que en el tiempo t^* en que se quema todo el combustible, la masa del cohete es:

$$M(t^*) = M_0 - M_c \Rightarrow -M_c = -\alpha t^*$$

$$t^* = \frac{M_c}{\alpha} \tag{12}$$

Ahora, se impone que la velocidad sea máxima en t^*. O sea:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t^*} = 0$$

Evaluando (9) en t^*:

$$(M_0 - M_c)0 = -u(-\alpha^*) - (M_0 - M_c)g$$

$$\boxed{\alpha^* = \frac{M_0 - M_c}{u}g} \tag{13}$$

Podemos calcular el tiempo en que se consume todo el combustible reemplazando (13) en (12):

$$t^* = \frac{M_c u}{(M_0 - M_c)g}$$

d) De la parte c), despejamos la masa del cohete en función del tiempo:

$$M(t) = M_0 - \alpha t \tag{14}$$

Sustituyendo (14) en (11):

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = -\ln\left(\frac{M_0 - \alpha t}{M_0}\right) - gt$$

$$\frac{dz}{dt} = -u\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right) - gt \tag{15}$$

Integramos (15), considerando que el cohete parte desde $z_0 = 0$:

$$z - z_0 = -\frac{gt^2}{2} + \frac{uM_0}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right) - 1\right]\Big|_0^t$$

Donde se usó la integral conocida para el logaritmo natural y la regla de la cadena:

$$\int \ln x = x(\ln x - 1) + C$$

Evaluando en los límites de integración, obtenemos la altura en función del tiempo:

$$z(t) = \frac{uM_0}{\alpha} - \frac{gt^2}{2} + \frac{uM_0}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right) - 1\right] \tag{16}$$

Evaluamos (16) en el tiempo en que se agota el combustible, t^*:

$$z(t^*) = \frac{uM_0}{\alpha} - \frac{g}{2}\left[\frac{M_c u}{(M_0 - M_c)g}\right]^2 + \frac{uM_0}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha M_c u}{M_0(M_0 - M_c)g}\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\alpha M_c u}{M_0(M_0 - M_c)g}\right) - 1\right]$$

Después de que se acaba el combustible, el movimiento está influenciado sólo por la gravedad:

$$h(t) = z(t^*) + v(t^*)t - \frac{gt^2}{2} \tag{17}$$

Con $v(t^*)$ la velocidad del cohete a la altura $z(t^*)$. La obtenemos reemplazando t^* en (15):

$$v(t^*) = -u\ln\left(1 - \frac{\alpha M_c u}{M_0(M_0 - M_c)g}\right) - \frac{M_c u}{M_0 - M_c}$$

Para encontrar la altura máxima, derivamos (17) con respecto al tiempo e igualamos a 0:

$$\frac{dh}{dt} = 0 = v(t^*) - gt$$

Despejamos el tiempo t_f en el que el cohete se detiene:

$$t_f = \frac{v(t^*)}{g} \tag{18}$$

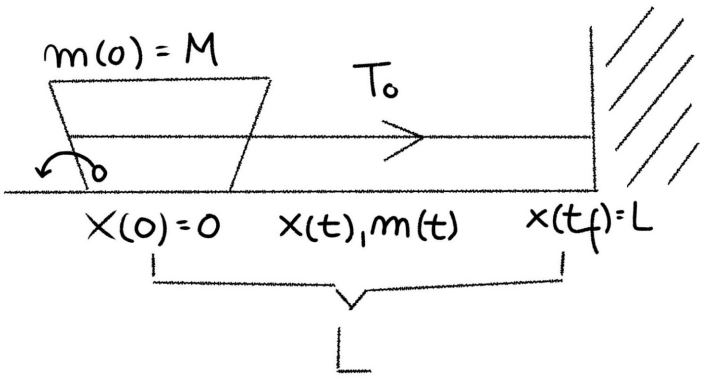
Reemplazando (18) en (17), hallamos la altura máxima que alcanza el cohete:

$$\boxed{h_{max} = z(t^*) + \frac{v(t^*)^2}{2g}}$$

Con $z(t^*)$ y $v(t^*)$ ya calculadas. La condición para que el cohete siga subiendo sin cota es que la velocidad $v(t^*)$ sea mayor o igual a la velocidad de escape, de modo que el cohete venza la atracción gravitacional que la Tierra (de masa M_T y radio R_T) ejerce sobre éste:

$$\boxed{v(t^*) \geq v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$$

2. *a*) En primer lugar, se definirá el sistema tal que $x(0) = 0$ y $x(t_f) = L$, como se aprecia en la figura:



De esta manera, al integrar dm/dx, considerando que el balde pierde masa, nos queda:

$$dm = -\frac{M}{L}dx \Rightarrow m(x) = -\frac{M}{L}x + C$$

$$m(0) = M = C \quad , \quad m(L) = 0$$

$$m(x) = M\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Luego, se plantea la ecuación de movimiento tal que el momentum lineal es $\vec{p} = m\vec{v} = m(x)\dot{x}\hat{x}$. Notamos que si se deriva la expresión para p, se llega a expresiones más complicadas que no se podrán resolver. La única opción sería volver a la misma expresión de la cual partimos. El problema también yace en que al plantear la ecuación aparecen las variables x, $\dot{x}$ y t, con lo que no podemos encontrar directamente una expresión para $\dot{x}$ en función de x. En consecuencia, no podemos determinar una fórmula para la energía cinética K en función sólo de x. Trabajaremos entonces directamente con la variable t, llegando a $x(t)$ y con esto resolveremos el problema:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = T_0$$

Integramos en el tiempo, considerando que el balde parte del reposo:

$$(m\dot{x})_t - (m\dot{x})_0 = T_0 t \Rightarrow m\dot{x} = T_0 t$$

$$M\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{dx}{dt} = T_0 t$$

Integramos la ecuación diferencial a variables separables:

$$M\left(x - \frac{x^2}{2L}\right) = \frac{T_0 t^2}{2} \Rightarrow x - \frac{x^2}{2L} = \frac{T_0 t^2}{2M}$$

$$x^2 - 2Lx + \left(\frac{T_0 L}{M}\right)t^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2Lx + \alpha t^2$$

Con $\alpha = T_0 L/M$. Resolvemos la ecuación cuadrática para $x(t)$:

$$x = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 - 4\alpha t^2}}{2} = L \pm \sqrt{L^2 - \alpha t^2}$$

Como $x(0) = 0$, escogemos el signo negativo:

$$x(t) = L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2}$$

Derivamos con respecto al tiempo para encontrar la velocidad:

$$\dot{x} = \frac{\alpha t}{\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}$$

Reemplazamos en la expresión para la masa del balde:

$$m(t) = M\left(1 - \frac{L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2}}{L}\right) = \frac{M}{L}\sqrt{L^2 - \alpha t^2}$$

Reemplazando masa y velocidad, obtenemos la energía cinética:

$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{M}{2L}\sqrt{L^2 - \alpha t^2}\frac{\alpha^2 t^2}{L^2 - \alpha t^2} = \frac{M\alpha^2 t^2}{2L\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}$$

Vemos que no es posible encontrar una expresión simple para K en función de x, salvo despejando la variable temporal en la expresión para $x(t) \Rightarrow t(x)$. Conviene seguir trabajando con la variable temporal y maximizar K en base a ésta:

$$\frac{dK}{dt} = 0 = \frac{M\alpha^2}{2L}\left[\frac{2t\sqrt{L^2 - \alpha t^2} + t^2\frac{2\alpha t}{2\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}}{L^2 - \alpha t^2}\right] = \frac{M\alpha^2}{2L(L^2 - \alpha t^2)^{3/2}}(2t(L^2 - \alpha t^2) + \alpha t^3)$$

$$2t(L^2 - \alpha t^2) + \alpha t^3 = 0 \Rightarrow 2L^2 - 2\alpha t^2 + \alpha t^2 = 0 \Rightarrow 2L^2 = \alpha t^2 \Rightarrow t_m = L\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$

Antes de estudiar si este instante t_m es en el cual la energía cinética K alcanza su máximo, se debe calcular el instante en el que el balde llega al muro, o sea cuando $x = L$:

$$x = L = L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2} \Rightarrow \sqrt{L^2 - \alpha t^2} = 0 \Rightarrow L^2 - \alpha t^2 = 0 \Rightarrow t_f = L\sqrt{\frac{1}{\alpha}} < L\sqrt{\frac{2}{\alpha}} = t_m$$

Como $t_f < t_m$, el balde llega al muro antes de que la energía cinética alcance su máximo global, aún cuando este máximo global no tenga sentido tampoco, dado que t debe ser menor que t_f, de lo contrario el denominador se vuelve nulo y la expresión para K explota a infinito. Ahora calcularemos el máximo de K notando que la función sería creciente siempre y cuando $t < t_f$, entonces el máximo buscado se encuentra evaluando en ese instante, cuando el denominador se anula y la energía cinética $K \to \infty$. Esto tiene sentido al considerar que la masa sería nula en el último instante, pero aún se le seguiría aplicando una fuerza constante T_0, por lo que la aceleración sería cada vez mayor a medida $x \to L$. Por otro lado, despejamos t en función de x:

$$t(x) = \sqrt{\frac{L^2 - (L - x)^2}{\alpha}}$$

$$\boxed{K(x) = \frac{T_0[L^2 - (L - x)^2]}{2(L - x)}} \Rightarrow \boxed{K_{max} = \infty}$$

b) En este caso se debe aplicar el hecho de que $p = m\dot{x}$, y reemplazar la expresión para $t(x)$:

$$p(t) = m(t)\dot{x}(t) = \frac{M\alpha t}{L} = T_0 t$$

$$\boxed{p(x) = T_0\sqrt{\frac{L^2 - (L-x)^2}{\alpha}}}$$

Dado que ahora se nos pide encontrar el máximo, esto se puede hacer en la variable temporal:

$$\frac{dp}{dt} = T_0$$

Es decir, el aumento de momentum lineal es constante en el tiempo, con lo que su valor máximo se alcanzará al evaluar en el momento en que el balde llega a la pared, t_f:

$$\boxed{p_{max} = T_0 t_f = \frac{T_0 L}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{MLT_0}}$$

Aquí conviene destacar el hecho de que $K_{max} = \infty$ viene de que la energía cinética depende de $\dot{x}^2$, en cambio el momentum lineal depende de $\dot{x}$, con lo que el aumento de velocidad se compensa en orden de magnitud con la disminución de masa, quedando así un valor finito para p_{max}.