Auxiliar 14

05/05

P1// Por conservación del momentum angular (Ya que no hay fuerzas externas):

$$\vec{p}_{1-} + \vec{p}_{2-} = \vec{p}_{1+} + \vec{p}_{2+}$$

Usando un sistema de coordenadas tq $\hat{x}$ coincida con $\vec{p}_{CM}$, obtenemos para cada componente:

$\hat{x}$) $m_1 v_{1-} \cos(\theta_{1-}) + m_2 V_{2-} \cos(\theta_{2-}) = m_1 v_{1+} \cos(\theta_{1+}) + m_2 V_{2+} \cos(\theta_{2+})$

$\hat{y}$) $-m_1 v_{1-} \sin(\theta_{1-}) + m_2 V_{2-} \sin(\theta_{2-}) = m_1 v_{1+} \sin(\theta_{1+}) - m_2 V_{2+} \sin(\theta_{2+})$

Multiplicamos la componente $\hat{x}$ por $\sin(\theta_{1+})$ e $\hat{y}$ por $\cos(\theta_{1+})$. Restando estas ecuaciones se llega a:

$$\begin{aligned} &m_1 v_{1-} (\cos(\theta_{1-})\sin(\theta_{1+}) + \sin(\theta_{1-})\cos(\theta_{1+})) + \\ &m_2 v_{2-} (\cos(\theta_{2-})\sin(\theta_{1+}) - \sin(\theta_{2-})\cos(\theta_{1+})) = \\ &m_2 V_{2+} (\cos(\theta_{2+})\sin(\theta_{1+}) + \sin(\theta_{2+})\cos(\theta_{1+})) \end{aligned}$$

$* \ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$\Leftrightarrow \quad m_2 V_{2+} \sin(\theta_{1+} + \theta_{2+}) = m_1 V_{1-} \sin(\theta_{1+} + \theta_{1-}) + m_2 V_{2-} \sin(\theta_{1+} - \theta_{2-})$$

$$\therefore V_{2+} = \frac{m_1 V_{1-} \sin(\theta_{1+} + \theta_{1-}) + m_2 V_{2-} \sin(\theta_{1+} - \theta_{2-})}{m_2 \sin(\theta_{1+} + \theta_{2-})}$$

Se puede obtener V_{1+} si se reemplaza V_{2+} en $\hat{x}$ o $\hat{y}$ //

b) Definimos algunas relaciones entre velocidades:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{V}_{1-} + m_2 \vec{V}_{2-}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{V}_{1-} - m_2 \vec{V}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{V}_{2-} + m_1 \vec{V}}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{1-} = \vec{V}_{CM} + \frac{m_2}{M}\vec{V} \quad \wedge \quad \vec{V}_{2-} = \vec{V}_{CM} - \frac{m_1}{M}\vec{V}$$

De manera análoga, para después del choque se tendrá:

$$\vec{V}_{1-} = \vec{V}_{CM} + \frac{m_2}{M}\vec{V}' \quad \wedge \quad \vec{V}_{2-} = \vec{V}_{CM} - \frac{m_1}{M}\vec{V}'$$

Calculamos la energía cinética inicial:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 |V_{1-}|^2 + \frac{1}{2} m_2 |V_{2-}|^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(V_{CM}^2 + \frac{2 m_2 V_{cm} V}{M} + \frac{m_2^2}{M^2} V^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(V_{CM}^2 + \frac{2 m_1 V_{cm} V}{M} + \frac{m_1^2}{M^2} V^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} V_{CM}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) m_1 m_2 \frac{V^2}{M^2}$$

$$= \frac{1}{2} V_{CM}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \mu V^2$$

Análogo para K_f:

$$K_f = \frac{1}{2} V_{CM}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \mu V'^2$$

Luego, la energía perdida $Q = K_i - K_f$

$$Q = \frac{1}{2} \mu (V^2 - V'^2) = \frac{1}{2} \mu V^2 \left(1 - \left(\frac{V'^2}{V^2} \right) \right) = \frac{1}{2} \mu V^2 (1 - \varepsilon^2)$$

c) Sea $\varepsilon \to 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \mu V^2 \wedge V' = 0$. En este caso se pierde el máximo de energía.

$$V' = V_{1+} - V_{2+} = 0 \Rightarrow V_{1+} = V_{2+}$$

Se calcula la velocidad final como:

$$K_f = K_i - Q = \frac{1}{2} m_1 V_{1-}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2-}^2 - \frac{1}{2} \mu V^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \underbrace{\frac{(m_1 V_{1-}^2 + m_2 V_{2-}^2 - \mu V^2)}{m_1 + m_2}}_{(\text{Velocidad final})^2}$$

$$\therefore V_f = \sqrt{\frac{m_1 V_{1-}^2 + m_2 V_{2-}^2 - \mu V^2}{m_1 + m_2}}$$

El ángulo resultante será nulo, pues la velocidad resultante debe coincidir con la velocidad del centro de masas.

Con $\varepsilon \to 1$ se conserva la energía $\Leftrightarrow Q = 0 \wedge V' = V$. Planteando ecuaciones de conservación de momentum lineal y energía cinética (donde $V = V'$), considerando que el momentum perpendicular a la del centro de masa es 0 por la construcción del problema, queda un sistema de 4 ecuaciones donde obtener todo lo pedido.

P2// Sea V_f la velocidad con que se devuelve la pelota

- Momento Lineal] $MV = mv_{CM} - MV_f$ (1)
- Momento Angular] $-MVD = \frac{mL^2w}{12} + MV_fD$ (2)
- Energía] $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{24}mL^2w^2$ (3) $\quad$ * $K = \frac{M}{2}V_{CH}^2 + \frac{1}{2}w^2 I$

(1) · D + (2):

$$\cancel{m}V_{CM}D - MV_f\cancel{D} + \frac{\cancel{m}L^2w}{12} + MV_f\cancel{D} = 0$$

$$V_{CM} = -\frac{L^2w}{12D}$$

De (1):

$$V_f = \frac{m}{M}V_{CM} - V$$

Reemplazando en (3):

$$\frac{MV^2}{\cancel{2}} = \frac{m}{\cancel{2}}V_{CM}^2 + \frac{M}{\cancel{2}}\left(\frac{m}{M}V_{CM} - V\right)^2 + \frac{m}{\cancel{24}}L^2w^2$$

$$MV^2 = mV_{CM}^2 + M\left(\frac{m^2}{M^2}V_{CM}^2 - \frac{2mV_{CM}V}{M} + V^2\right) + \frac{m}{12}L^2w^2$$

Reemplazando V_{CM}:

$$MV^2 = \frac{mL^2w^2}{144D^2} + M\left(\frac{m^2}{M^2}\frac{L^4w^2}{144D^2} + \frac{2mV}{M}\frac{L^2w}{12D} + V^2\right) + \frac{m}{12}L^2w^2$$

$$\cancel{MV^2} = \frac{\cancel{m}\cancel{L^2}\cancel{w^2}}{144D^2} + \frac{m^{\cancel{2}}L^{\cancel{4}}\cancel{w^2}}{144MD^2} + \frac{\cancel{m}V\cancel{L^2}\cancel{w}}{6D} + \cancel{MV^2} + \frac{\cancel{m}}{12}\cancel{L^2}w^{\cancel{2}}$$

$$\frac{mL^2w}{144MD^2} + \frac{w}{144\cdot D^2} + \frac{V}{6D} + \frac{w}{12} = 0$$

$$w\left(\frac{mL^2}{24MD^2} + \frac{1}{24\cdot D^2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{V}{D}$$

$$w = \frac{-V}{D\left(\frac{mL^2}{24MD^2} + \frac{1}{24\cdot D^2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{12D}{L^2}\cdot\frac{-L^2V/12D}{D\left(\frac{mL^2}{24MD^2} + \frac{1}{24\cdot D^2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$w = -\frac{12D}{L^2}\frac{V}{\left(\frac{m}{2M} + \frac{6D^2}{L^2} + \frac{1}{2}\right)} = -\frac{12D}{L^2}\frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)}$$

Pero teníamos $V_{CM} = -\frac{L^2 w}{12D}$, por lo que identificamos:

$$V_{CM} = \frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)} \Rightarrow V_f = \frac{m}{M}\frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)} - V$$

Finalmente:

$$K_{traslacional} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{m}{M}\frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)} - V\right]^2$$

$$K_{rotacional} = \frac{1}{2}I w^2 = \frac{6D^2 m}{L^2}\left[\frac{2V}{\left(\frac{m}{M} + \frac{12D^2}{L^2} + 1\right)}\right]^2$$