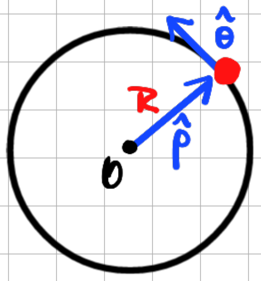
Auxiliar 12

28/04

P1// Veamos una órbita circular y las ecuaciones que describen su movimiento.



¿Qué pasa con $\dot{r}$, es decir, cómo cambia la distancia del objeto al origen? No cambia $\Rightarrow \dot{r} = 0$

Recordemos que para problemas de este estilo se suele trabajar con potencial efectivo, tal que:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff} \quad \text{siendo} \quad U_{eff} = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)$$

Como $\dot{r} = 0$:

$$E = U_{eff} \quad \wedge \quad \frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0$$

Queremos que la órbita sea estable, por lo que se debe cumplir:

$$\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\Big|_{r=R} > 0$$

Haciendo la matraca:

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\Big|_{r=R} = \Big(\overset{\to -F}{\frac{\partial U}{\partial r}} - \frac{\ell^2}{mr^3}\Big)\Big|_{r=R} = 0$$

De aquí se obtiene la fuerza:

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\ell^2}{mr^3}$$

Viendo la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\Big|_{r=R} = \Big(-\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{3\ell^2}{mr^4}\Big)\Big|_{r=R} > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}\Big|_{r=R} < \frac{3\ell^2}{mR^4} = -\frac{3F(R)}{R}$$

Usando $U = -\frac{K}{r^\lambda} \Rightarrow F = -\frac{\lambda K}{r^{\lambda+1}}$

$$\frac{\lambda(\lambda+1)K}{R^{\lambda+2}} < \frac{3\lambda K}{R^{\lambda+2}}$$

De aquí se desprende $\lambda < 2$

P2// a) Sabemos $F(r) = -\nabla U \overset{\text{en 1D}}{=} -\frac{\partial U}{\partial r}$. Por como se construye U_{eff}, se identifica $U(r)$ tq:

$$U(r) = Cr^3 \quad \Rightarrow \quad F(r) = -3Cr^2$$ Fuerza atractiva

b) Para que sea una órbita circular se debe cumplir:

$$\left.\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\ell^2}{mr_0^3} + 3Cr_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \left(\frac{\ell^2}{3Cm}\right)^{1/5}$$

c) Escribimos la energía para todo tiempo:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}}_{K} + U$$

La energía mínima se obtiene cuando $\dot{r} = 0$, así:

$$E_{min} = \frac{\ell^2}{2mr^2} + U$$

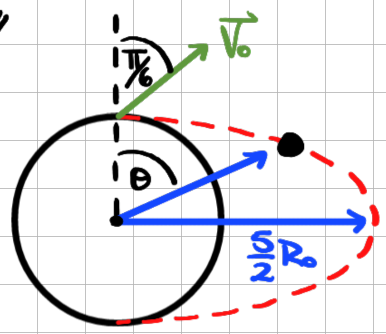
Restando las ecuaciones:

$$E - E_{min} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(r_0) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{dr}{dt}\right|_{r_0} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_{min})}$$

d) En r_{max} también se cumple $\dot{r} = 0$. Se tendrá:

$$K = \frac{\ell^2}{2mr_{max}^2}$$

P3//



Como sólo hay fuerza en $\hat{r}$ no hay torque y el momento angular se conserva. Por esto se puede trabajar en el plano. Así:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad \wedge \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

En $t = 0$ se tiene:

$$\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{V_0} = V_0\cos(\pi/6)\hat{r} + V_0\sin(\pi/6)\hat{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}V_0\hat{r} + \frac{1}{2}V_0\hat{\theta}$$

Usamos el momento angular:

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r\hat{r} \times (\cancel{\dot{r}}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$ Como siempre ☺

Como habíamos dicho l cte:

$$mr^2\dot{\theta} = m r(0)^2\dot{\theta}(0) \rightarrow r^2\dot{\theta} = R_0^2 \cdot \frac{V_0}{2R_0} = \frac{1}{2}R_0V_0$$

Usando conservación de energía:

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = E \rightarrow \frac{1}{2}m|\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}|^2 - \frac{GMm}{r} = E$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = E$$

Suponemos que la distancia máxima se alcanza en t^* tq $r(t^*) = \frac{5}{2}R_0$

Evaluando en $t = 0$ y $t = t^*$

se impone 0

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2(0) + r^2(0)\dot{\theta}^2(0)) - \frac{GMm}{r(0)} = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{r}^2(t^*)} + r^2(t^*)\dot{\theta}^2(t^*)) - \frac{GMm}{r(t)^*}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}V_0^2 + \frac{1}{4}V_0^2\right) - \frac{GMm}{R_0} = \frac{1}{2}m\left(\frac{V_0^2R_0^2}{4}\right)\left(\frac{2}{5R_0}\right)^2 - \frac{2GMm}{5R_0}$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2(1 - 1/25) = \frac{GMm}{R_0}(1 - 2/5)$$

$$V_0^2 = \frac{25}{12m} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{GMm}{R_0}$$

$$\therefore V_0 = \sqrt{\frac{5}{4}\frac{GMm}{R_0}}$$