FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 11

a) La clave para determinar la velocidad inicial y final es usar los teoremas/leyes de conservación de la energía y el momentum angular, cantidades conservadas en los movimientos bajo una fuerza central:

$$l = mr^2\dot{\theta} = cte_1$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = cte_2$$

Aplicamos estas dos leyes al punto inicial y final de la órbita de transferencia. Al tratarse de los vértices de la elipse, en ambos la velocidad es perpendicular a la posición, por lo que escribimos la conservación del momentum angular como:

$$l = md_Tv_1 = md_Mv_2$$

Igualando la energía inicial y la final:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d_T} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{d_M}$$

Esto nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$v_1 = \frac{l}{md_T} \quad , \quad v_2 = \frac{l}{md_M}$$

Sustituyendo en la ley de conservación de la energía:

$$\frac{l^2}{2md_T} - \frac{GMm}{d_T} = \frac{l^2}{2md_M} - \frac{GMm}{d_M}$$

Agrupando términos, despejamos el momentum angular por unidad de masa:

$$\frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{d_T^2} - \frac{1}{d_M^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{d_T} - \frac{1}{d_M}\right) \Rightarrow \frac{l}{m} = \sqrt{\frac{2GMd_Td_M}{d_T + d_M}}$$

Esto nos da la magnitud de la velocidad inicial y final:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMd_M}{d_T(d_T + d_M)}} \quad , \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GMd_T}{d_M(d_T + d_M)}}$$

b) El valor de v_1 calculado es la magnitud de la velocidad que tiene la nave al iniciar la órbita de transferencia, NO es la rapidez que debemos comunicar a la nave para ponerlo en órbita, ya que la nave posee la velocidad orbital de la Tierra (v_T). Por ello, la magnitud que nos interesa es el incremento de velocidad (o, "delta v") respecto a la que ya tiene por estar sobre la Tierra:

$$\Delta v_1 = v_1 - v_T$$

Podemos despejar la velocidad orbital de la Tierra usando la 2da Ley de Newton para el problema de Kepler con órbita circunferencial:

$$F = ma_c \Rightarrow \frac{mv_T^2}{d_T} = \frac{GMm}{d_T^2} \Rightarrow v_T = \frac{GM}{d_T}$$

Con esto, la velocidad vista desde la Tierra con la que la nave entra a la órbita de transferencia es:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GMd_M}{d_T(d_T + d_M)}} - \sqrt{\frac{GM}{d_T}}$$

c) Cuando la nave espacial describe una órbita circular inicial de radio d_T, la energía E_1 de la nave es:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{GMm}{d_T} = \frac{GMm}{2d_T} - \frac{GMm}{d_T} = -\frac{GMm}{2d_T}$$

La energía E_2 de la nave es constante en todos los puntos de la órbita de transferencia. Por simplicidad, la escribimos en función de la velocidad inicial:

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d_T}$$

La energía que se debe suministrar en la Tierra para que entre a la órbita de transferencia es:

$$\Delta E_T = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d_T} - \left(\frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{GMm}{d_T}\right) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_T^2$$

$$\Delta E_T = \frac{GMm}{2d_T}\left(\frac{d_M - d_T}{d_M + d_T}\right) > 0$$

d) Del mismo modo que en la parte b), al llegar a Marte, la nave debe adaptarse a la velocidad orbital marciana. Podemos obtenerla considerando que GM es constante, o aplicando dinámica del MCU:

$$v_T^2 d_T = v_M^2 d_M = GM \Rightarrow v_M = v_T\sqrt{\frac{d_T}{d_M}} = \sqrt{\frac{GM}{d_M}}$$

Con esto, la velocidad vista desde Marte con la que la nave sale de la órbita de transferencia es:

$$\Delta v_2 = v_M - v_2 = \sqrt{\frac{GM}{d_M}} - \sqrt{\frac{2GMd_T}{d_M(d_T + d_M)}}$$

e) Cuando la nave espacial describe una órbita circular final de radio d_M, la energía E_3 de la nave es:

$$E_3 = \frac{1}{2}v_M^2 - \frac{GMm}{d_M} = -\frac{GMm}{2d_M}$$

La energía que se debe suministrar en Marte para que salga de la órbita de transferencia es:

$$\Delta E_M = E_3 - E_2 = \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{GMm}{2d_M}\left(\frac{d_M - d_T}{d_M + d_T}\right) > 0$$

f) El incremento Δv_1 es la velocidad con la que la nave debe salir de la atracción terrestre, pero no es aquella con la que debe lanzarse la nave. Para determinarla, debemos tener en cuenta además el fenómeno de la velocidad de escape. Si nos imaginamos un único impulso inicial (como un cañonazo), podríamos calcular la velocidad de despegue aplicando de nuevo la conservación de la energía, ahora bajo el campo gravitatorio terrestre. A la derecha se tiene $r \gg R_T$, lo que anula el término potencial:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = \frac{1}{2}m\Delta v_1^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\Delta v_1^2 + v_e^2}$$

Donde v_e es la velocidad de escape sobre la superficie de la Tierra:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

g) La velocidad lineal de la Tierra es igual a la circunferencia de la órbita dividida por el periodo orbital. Consideramos que $T_T = 1$ año $= 365$ días $= (365)(24)$ horas $= (365)(24)(3600)$ s:

$$v_T = \frac{2\pi(150)(10^6)}{31536000} \approx 29,88\text{km/s}$$

Se tiene que $GM = v_T^2 d_T = v_M^2 d_M$, $d_M \approx 1,5d_T$. Con esto, la velocidad orbital de Marte queda:

$$v_M = v_T\sqrt{\frac{d_T}{d_M}} = v_T\sqrt{\frac{1}{1,5}} \approx 24,39\text{km/s}$$

La velocidad inicial y final de la nave es, aproximadamente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2v_T^2 d_T d_M}{d_T(d_T + d_M)}} = v_T\sqrt{\frac{(2)(1,5)d_T}{2,5d_T}} = v_T\sqrt{\frac{3}{2,5}} \approx 32,73\text{km/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2v_T^2 d_T d_T}{d_M(d_T + d_M)}} = v_T\sqrt{\frac{(2)(d_T)(d_T)}{(1,5d_T)(2,5d_T)}} = v_T\sqrt{\frac{2}{(1,5)(2,5)}} \approx 21,82\text{km/s}$$

Por otro lado, los "delta v" son aproximadamente:

$$\Delta v_1 \approx (32,73 - 29,88)\text{km/s} = 2,85\text{km/s}$$

$$\Delta v_2 \approx (24,39 - 21,82)\text{km/s} = 2,57\text{km/s}$$

h) Para que la órbita de transferencia de Hohmann funcione, tanto la Tierra como Marte deben encontrarse en los extremos de la elipse, por lo que la nave no puede lanzarse en cualquier momento. La fecha de lanzamiento ha de ser tal que, para cuando la nave llegue a la órbita marciana, Marte se encuentra en ese mismo punto. La duración de la órbita de transferencia t_v es la mitad de su periodo orbital. Podemos encontrarla usando la 3a Ley de Kepler. La aplicamos a la nave y a la Tierra:

$$\frac{(2t_v)^2}{(\frac{d_T+d_M}{2})^3} = \frac{T_T^2}{d_T^3} \Rightarrow t_v = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+d_M/d_T}{2}\right)^3} T_T = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+1,5}{2}\right)^3} T_T \approx 255\text{días}$$

Por lo que la nave debe ser lanzada aproximadamente 255 días antes de que Marte llegue al punto opuesto del lanzamiento.

i) Calcularemos cada cuánto tiempo se puede hacer un siguiente lanzamiento a Marte que siga la órbita de transferencia de Hohmann, en caso que el primer lanzamiento falle o se frustre. Desde un sistema ligado a la Tierra ("0"), la velocidad angular de Marte ("2") alrededor del Sol ("1") es:

$$|\omega_{20}| = |\omega_{21} - \omega_{01}| = \left|\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_T}\right|$$

El periodo orbital de Marte se obtiene a partir de la 3a Ley de Kepler: $T_M = T_T(1,5)^{3/2} \approx 671$ días.

Con esto, el periodo de tiempo que se debe esperar para hacer el siguiente lanzamiento es:

$$T_{20} = \frac{2\pi}{2\pi(1/365 - 1/671)} = \left(\frac{1}{365} - \frac{1}{671}\right)^{-1} \approx 800\text{días}$$