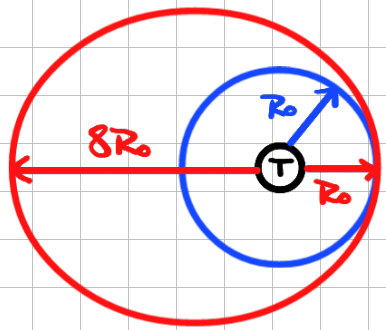
Auxiliar 10

21/04

P1//



Como S_2 siempre está a una distancia R_0 (por ser una circunferencia), naturalmente la distancia cuando se acoplen será R_0.

En este punto S_1 y S_2 tendrán velocidad $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente, de forma tangencial a la circunferencia ($\perp$ al radio)

Luego el momento angular $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$ para cada satélite será:

$$\vec{l}_1 = mR_0 v_1 \hat{k} \quad \wedge \quad \vec{l}_2 = mR_0 v_2 \hat{k}$$

Recordemos que para diferentes cónicas, se tendrá:

$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e\cos(\phi)}$$

Con $\phi = 0$ se consigue r_{min}, y con $\phi = \pi$ se consigue r_{max}. Queda un sistema de ecuaciones para R_2 y e.

$$r_{min} = \frac{R_2}{1+e} = R_0 \quad \wedge \quad r_{max} = \frac{R_2}{1-e} = 8R_0$$

Resolviendo se llega a:

$$e = 7/9 \quad \wedge \quad R_2 = \frac{16}{9} R_0$$

Pero también se sabe que:

$$R_2 = \frac{l_2^2}{GMm^2}$$

Despejando el momento angular:

$$\frac{16}{9} R_0 = \frac{l_2^2}{GMm^2} \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{4m}{3}\sqrt{GMR_0}$$

Sabíamos $l_2 = mR_0 v_2$. Igualando y despejando la velocidad:

$$v_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

De manera similar, se encuentra v_1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

Cuando los satélites se acoplan, el momentum se debe conservar, es decir:

$$p_1 + p_2 = p_3$$

$$\cancel{m}v_1 + \cancel{m}v_2 = 2\cancel{m}v_3$$

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Reemplazando:

$$v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{R_0}} + \sqrt{\frac{GM}{R_0}}\right) = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

Con esto es posible determinar la energía cinética de S_3, y el potencial al que estará sometido será:

$$U_3 = -\frac{2mMG}{R_0}$$

La energía mecánica total será:

$$E = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}m\cdot\frac{49GM}{36R_0} - \frac{2mMG}{R_0} = -\frac{23mMG}{36R_0}$$

En los radios mínimo y máximo, $\dot{r}=0$, y se cumple que la energía mecánica es sólo el potencial efectivo.

$$E = \frac{l_3^2}{4mr^2} - \frac{2mMG}{r} = -\frac{23mMG}{36R_0}$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen dos soluciones:

$$r_{min} = R_0 \quad \wedge \quad r_{max} = \frac{49}{23}R_0$$

P2// Se tienen las siguientes condiciones iniciales para el asteroide:

$$x(t=0) = D \quad \wedge \quad \dot{x}(t=0) = \sqrt{\frac{2GM}{D}}$$

Veamos la energía inicial:

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}m\cdot 2\frac{GM}{D} - \frac{GmM}{D} = 0$$

Como la energía se conserva, será 0 $\forall t$. Luego:

$$E = K + U = 0 \Rightarrow K = -U \rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{GMm}{x}$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2GM}\, x^{1/2}$$

Nos quedamos con $v < 0$ por como se ve en la figura. Ahora toca matraca

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{x} = -\sqrt{2GM}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} x^{1/2}\, dx = \int_0^t -\sqrt{2GM}\, dt$$

$$\frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_{x_0}^{x(t)} = -\sqrt{2GM}\, t$$

$$x(t)^{3/2} - D^{3/2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2GM}\, t$$

$$x(t) = \left[D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2GM}\, t\right]^{2/3}$$

b) Encontremos el semieje mayor, que sabemos que será:

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}, \quad r_{min} = \frac{\tilde{R}}{1+e}, \quad r_{max} = \frac{\tilde{R}}{1-e} = R$$

No confundir R distancia de intercepción y $\tilde{R}$ la escala de longitud de la cónica. De r_{max} se obtiene $\tilde{R} = (1-e)R$, y así:

$$a = \frac{R}{2}\left(\frac{1-e}{1+e}\right) + \frac{R}{2} = \frac{R}{1+e}$$

Teniendo el semieje mayor, se puede ocupar 3ra Ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4a^3\pi^2}{GM}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4R^3\pi^2}{GM(1+e)^3}}$$

T es lo que demore en hacer una vuelta, y nosotros queremos media vuelta para encontrar R, que será $x(T/2)$:

$$R = x\left(\frac{T}{2}\right) = x\left(\sqrt{\frac{R^3\pi^2}{GM(1+e)^3}}\right) = \left[D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2\cancel{GM}}\sqrt{\frac{R^3\pi^2}{\cancel{GM}(1+e)^3}}\right]^{2/3}$$

$$R^{3/2} = D^{3/2} - \sqrt{\frac{9}{2}}\,\pi\,\frac{R^{3/2}}{(1+e)^{3/2}}$$

$$R^{3/2}\left(1+\sqrt{\frac{9}{2}}\frac{\pi}{(1+e)^{3/2}}\right) = D^{3/2}$$

$$\therefore R = D\left(1+\sqrt{\frac{9}{2}}\frac{\pi}{(1+e)^{3/2}}\right)^{-2/3}$$

c) Se dice $r_{min} = D/5$, y teníamos $r_{min} = R\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$. Se concluye:

$$D/5 = D\left(1+\sqrt{\frac{9}{2}}\frac{\pi}{(1+e)^{3/2}}\right)^{-2/3}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$$

De aquí es posible despejar e.