

FI2001-6: Mecánica**Profesor:** Claudio Romero Z.**Auxiliar:** Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 7

Conceptos útiles:

- Fuerza conservativa (el círculo indica que la curva es cerrada, $\nabla \times$: rotor, ∇ : gradiente):

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

- Gradiente en distintos sistemas de coordenadas:

- Cartesianas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

- Cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

- Esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

- Rotor en distintos sistemas de coordenadas:

- Cartesianas:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right) \hat{z}$$

- Cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

- Esféricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(F_\phi \sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

- Fuerzas centrales:

$$\vec{F} = F(r) \hat{r} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad , \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

- Conservación del momentum angular:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad , \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow l = mr^2 \dot{\phi} = cte$$

- Conservación de la energía:

$$E = K + U = cte$$

Problemas:

1. a) Aplicamos gradiente en coordenadas cartesianas:

$$\vec{F}_{U_1} = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\hat{z}\right) = -\frac{k}{2}(2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z}) = \boxed{-k(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})}$$

- b) Aplicamos gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{F}_{U_2} = -\left(\frac{\partial U_2}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_2}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial U_2}{\partial z}\hat{z}\right) = -Ae^{-k\rho}(-k)\hat{\rho} = \boxed{kAe^{-k\rho}\hat{\rho}}$$

- c) Aplicamos gradiente en coordenadas esféricas:

$$\vec{F}_{U_3} = -\left(\frac{\partial U_3}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_3}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial U_3}{\partial \phi}\hat{\phi}\right) = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r} = \boxed{-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}}$$

- d) Aplicamos rotor en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times \vec{F}_1 = (0 - 0)\hat{x} + (0 - 0)\hat{y} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\hat{z} \equiv \vec{0}$$

$\vec{F}_1$ es conservativa, con lo que:

$$\vec{F}_1 = \nabla U_{\vec{F}_1} = -\frac{\partial U_{\vec{F}_1}}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U_{\vec{F}_1}}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U_{\vec{F}_1}}{\partial z}\hat{z}$$

$$\frac{\partial U_{\vec{F}_1}}{\partial x} = -y \Rightarrow U_{\vec{F}_1} = -xy + c_1(y, z)$$

$$\frac{\partial U_{\vec{F}_1}}{\partial y} = -x \Rightarrow U_{\vec{F}_1} = -xy + c_2(x, z)$$

$$\frac{\partial U_{\vec{F}_1}}{\partial z} = 0 \Rightarrow U_{\vec{F}_1} = c_3(x, y)$$

$$\boxed{U_{\vec{F}_1} = -xy + c}$$

- e) Aplicamos rotor en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times \vec{F}_2 = (0 - 0)\hat{x} + (1 - 3\ln(z))\hat{y} + (2y - x)\hat{z} \neq \vec{0} \Rightarrow \underline{\vec{F}_2 \text{ es no conservativa.}}$$

- f) Aplicamos rotor en coordenadas esféricas. Lo hacemos por componentes:

$$\hat{r} : \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(r^2\sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial 0}{\partial \phi}\right) = \frac{1}{r\sin(\theta)}r^2\cos(\theta) = r\cot(\theta) \neq 0$$

$$\hat{\theta} : \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin}\frac{\partial r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}3r^2 = 3r \neq 0$$

$$\hat{\phi} : \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\theta)}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial \theta}\right) \equiv 0$$

$\Rightarrow \underline{\vec{F}_3 \text{ es no conservativa.}}$

2. a) Conectamos fuerza y movimiento con la 2da Ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\alpha r^n \hat{r} = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

La fuerza es central, por lo que es conservativa y la aceleración en la componente angular es nula:

$$-\alpha r^n = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\phi} = cte = l \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$$

Por a la conservación del momentum angular, podemos reemplazar $\dot{\phi}$ en función de r :

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{m}r^n = r\frac{l^2}{m^2r^4} - \frac{\alpha}{m}r^n = \frac{l^2}{m^2r^3} - \frac{\alpha}{m}r^n$$

Usamos el truco de cambio de derivada temporal a espacial e integramos, con $r(0)$, $\dot{r}(0)$ conocidos:

$$\ddot{r} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{l^2}{m^2r^3} - \frac{\alpha}{m}r^n \Rightarrow \int_{\dot{r}(0)}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} = \int_{r(0)}^r \left(\frac{l^2}{m^2r^3} - \frac{\alpha}{m}r^n \right) dr$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 - \dot{r}^2(0)) = -\frac{l^2}{2m^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2(0)} \right) - \frac{\alpha}{m(n+1)}(r^{n+1} - r(0)^{n+1})$$

Despejamos la velocidad radial como función de la distancia $\dot{r} = f(r)$:

$$\dot{r} = \sqrt{-\frac{l^2}{m^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2(0)} \right) - \frac{2\alpha}{m(n+1)}(r^{n+1} - r(0)^{n+1}) + \dot{r}^2(0)} = f(r)$$

$$f(r) = \frac{dr}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = \boxed{t = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{1}{f(r)} dr}$$

De ser integrable el lado derecho de la ecuación, obtendríamos una relación $r(t)$. El único caso explícito es cuando $n = -2$ (Ley de Gravitación Universal). Como $n \in \mathbb{N}$, la dejamos expresada.

- b) La energía mecánica es $E = K + U$, con $U(r)$ el potencial asociado a la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow -\alpha r^n \hat{r} = -\frac{dU}{dr} \hat{r} \Rightarrow U(r) = \frac{\alpha}{n+1} r^{n+1}$$

Para la energía cinética, usamos que la velocidad es $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{m^2r^4}\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2r^2}\right)$$

Reemplazamos en la expresión para la energía mecánica y definimos el potencial efectivo U_{ef} :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{ef}}(r)} \Rightarrow \boxed{U_{\text{ef}}(r) = \frac{\alpha}{n+1}r^{n+1} + \frac{l^2}{2mr^2}}$$

c) El radio de órbita circular es la distancia radial r_0 donde el potencial efectivo se minimiza:

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \alpha r^n - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow r^{n+3} = \frac{l^2}{m\alpha} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{l^2}{m\alpha} \right)^{\frac{1}{n+3}}$$

La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al radio de órbita circular es:

$$\omega_{P.O.}^2 = \frac{U''_{\text{ef}}(r_0)}{m} = \frac{1}{m} \left(\alpha n r_0^{n-1} + \frac{3l^2}{mr_0^4} \right) = \frac{1}{mr_0^4} \left(\alpha n r_0^{n+3} + \frac{3l^2}{m} \right)$$

$$\omega_{P.O.}^2 = \frac{1}{m \left(\frac{l^2}{m\alpha} \right)^{\frac{4}{n+3}}} \left(n \frac{l^2}{m} + \frac{3l^2}{m} \right) = \frac{l^2}{m^2 \left(\frac{l^2}{m\alpha} \right)^{\frac{4}{n+3}}} (n+3)$$

$$\omega_{P.O.} = \frac{l}{m \left(\frac{l^2}{m\alpha} \right)^{\frac{2}{n+3}}} \sqrt{n+3} \Rightarrow T_{P.O.} = \frac{2\pi}{\omega_{P.O.}}$$

d) Para determinar si las órbitas son cerradas para pequeñas oscilaciones respecto de la órbita circular, se debe calcular $\dot{\phi}(r_0)$ y calcular la proporción (razón κ) entre $\omega_{P.O.}$ y $\dot{\phi}(r_0)$:

$$\dot{\phi}(r_0) = \frac{l}{mr_0^2} = \frac{l}{m} \left(\frac{l^2}{m\alpha} \right)^{-\frac{2}{n+3}}$$

$$\kappa = \frac{\omega_{P.O.}}{\dot{\phi}(r_0)} = \sqrt{n+3}$$

Si $\kappa \in \mathbb{Q}$ se dan órbitas cerradas. Como $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \in \{1, 6, 13, 22, \dots\}$.

e) Dado un nivel de energía E , este debe ser siempre mayor a $E_0 = U_{\text{ef}}(r_0)$, de lo contrario K debiera ser negativa. Como la energía es constante, calculamos los puntos de retorno cuando $m\dot{r}^2/2 = 0$:

$$E = U_{\text{ef}}(r) = \frac{\alpha}{1+1} r^{1+1} + \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{\alpha r^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$Er^2 = \frac{\alpha r^4}{2} + \frac{l^2}{2m} \Rightarrow \frac{\alpha r^4}{2} - Er^2 + \frac{l^2}{2m} = 0$$

Esta es una ecuación bicuadrada, la que puede resolverse con la fórmula cuadrática:

$$r^2 = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - \alpha l^2/m}}{\alpha} \Rightarrow r_{+,-} = \sqrt{\frac{E \pm \sqrt{E^2 - \alpha l^2/m}}{\alpha}}$$

Notamos que sólo tomamos la 2da raíz positiva, ya que $r \geq 0$. El discriminante de la 1ra raíz es siempre positivo, ya que la energía es siempre mayor al valor mínimo del potencial efectivo:

$$E > E_0 = U_{\text{ef}}(r_0) = \sqrt{\frac{\alpha l^2}{m}}$$

Esta última demostración es directa de las partes b) y c) y se deja propuesta como ejercicio.