Pauta Control 1

Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliares: Jerónimo Herrera G. - Rodrigo Catalán B.
Ayudantes: Gerald Barnert S. - Diana Escobar C.

P1.-

i)

- Antes de que se corte el resorte de la derecha:
  Haciendo sumatoria de fuerzas y aplicando la 2da Ley de Newton, obtenemos:

$$\sum F_i = -kx - (-k)(-x) = -2kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_1^2 x = 0$$

  Con $\omega_1 = \sqrt{2k/m}$ **(+ 0,5 pts)**. La solución a esta ecuación de movimiento es:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

  Como la amplitud $A_1 = d$ y la condición incial dada es $x(0) = 0$:

$$x(0) = 0 = d\cos(\phi_1) \Rightarrow \phi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

  Con esto la posición y velocidad (positiva en la 1ra etapa del movimiento) quedan:

$$x(t) = d\cos(\omega_1 t - \pi/2) = x(t) = d\text{sen}(\omega_1 t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \omega_1 d\cos(\omega_1 t) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

- Momento t^* en el que se corta el resorte de la derecha:
  Conociendo la posición en la que se corta, $x(t^*) = d/2$, calculamos el tiempo t^* en que ocurre:

$$x(t^*) = \frac{d}{2} = d\text{sen}(\omega_1 t^*) \Rightarrow t^* = \frac{1}{\omega_1}\text{arcsen}(1/2)$$

  La velocidad en t^*, que junto con $x(t^*) = d/2$ se convierte en nueva CI para el movimiento, es:

$$\dot{x}(t^*) = \omega_1 d\cos(\omega_1 \frac{1}{\omega_1}\text{arcsen}(1/2)) = \omega_1 d\sqrt{1-(1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 d \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

- Después que se corta el resorte de la derecha:
  La nueva ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

  Cuya solución, nuevamente, es:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Con $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$ la frecuencia de oscilación de la nueva etapa del movimiento **(+ 0,5 pts)**.

Las nuevas condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ son:

$$x(0) = \frac{d}{2} = A\cos(\phi)$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 d = -A\omega_0 \mathrm{sen}(\phi)$$

Sistema de ecuaciones del cual se puede despejar la amplitud A y la fase ϕ:

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}\omega_0}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{\phi = \arctan(\sqrt{6})} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$\boxed{A = \frac{d}{2\cos(\phi)} = \frac{d}{2}\sqrt{1 + \sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}d} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{7}}{2}d\cos(\omega_0 t + \arctan(\sqrt{6}))}$$

ii) Se busca una solución particular para la etapa estacionaria de oscilación (asumiendo que su amplitud será mucho mayor que la de la solución homogénea), con frecuencia de forzaje $\omega = 5\omega_0$:

$$x(t) = x_p(t) = B(5\omega_0)\cos(5\omega_0 t + \delta(5\omega_0)) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$B(5\omega_0) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - (5\omega_0)^2)^2}} = \frac{F_0/m}{|-24\omega_0^2|} = \frac{F_0}{24m\omega_0^2} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$\tan(\delta(5\omega_0)) = \frac{2(0)5\omega_0}{(5\omega_0)^2 - \omega_0^2} = 0 \Rightarrow \delta = 0, \pi \quad ; \quad \omega > \omega_0 \Rightarrow \delta = \pi \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{24m\omega_0^2}\cos(5\omega_0 t + \pi) = -\frac{F_0}{24m\omega_0^2}\cos(5\omega_0 t) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}}$$

iii) La potencia entregada por la fuerza sinusoidal la podemos escribir como $P(t) = F(t)\dot{x}(t)$:

$$P(t) = \frac{5F_0^2}{24m\omega_0}\mathrm{sen}(5\omega_0 t)\cos(5\omega_0 t) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

Considerando el periodo de oscilación $T = 2\pi/5\omega_0$, la potencia promedio es:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{25F_0^2}{48m\pi}\int_0^T \mathrm{sen}(5\omega_0 t)\cos(5\omega_0 t)dt = \frac{25F_0^2}{48m\pi}\int_0^T \frac{d}{dt}\frac{1}{2(5\omega_0)}(\mathrm{sen}(5\omega_0 t)^2)dt = \boxed{0}$$

La potencia promedio es <u>cero</u>, ya que no hay amortiguamiento ($\gamma = 0$). **(+0,5 pts)**

$\boxed{\textbf{P2}.\text{-}}$

Datos:

- Coordenadas polares, con $r = R$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$:

$$\vec{r} = r\hat{r} = R\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

- Vectores unitarios:

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \mathrm{sen}(\theta)\hat{y} \quad , \quad \hat{\theta} = -\mathrm{sen}(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}$$
$$\hat{x} = \cos(\theta)\hat{r} - \mathrm{sen}(\theta)\hat{\theta} \quad , \quad \hat{y} = \mathrm{sen}(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}$$

- Condiciones iniciales:

$$\theta(0) = 0 \quad ; \quad ||\vec{v}(0)|| = v(0) = v_0$$
$$\vec{r}(0) = R\hat{r}(0) = R\hat{x} \quad ; \quad \vec{v}(0) = R\dot{\theta}(0)\hat{\theta}(0) = v_0\hat{y} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

i) Hacemos suma vectorial de fuerzas, las cuales son dos, el peso y la tensión de la barra:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{T} + m\vec{g} = -T\hat{r} - mg\hat{y} = -T\hat{r} - mg(\mathrm{sen}(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

Descomponiendo la segunda Ley de Newton en las direcciones radial y angular:

$$ma_r = \boxed{-mR\dot{\theta}^2 = -T - mg\mathrm{sen}(\theta)} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$ma_\theta = \boxed{mR\ddot{\theta} = -mg\cos(\theta)} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

ii) Siguiendo la instrucción del enunciado:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos(\theta)\dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = -\frac{g}{R}\frac{d}{dt}(\mathrm{sen}(\theta)) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\mathrm{sen}(\theta)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\mathrm{sen}(\theta) = cte \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

En particular, evaluamos en las condiciones iniciales:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\dot{\theta}(0)^2}{2} + \frac{g}{R}\mathrm{sen}(\theta(0)) = \frac{v_0^2}{2R^2} + \frac{g}{R}0 = \frac{v_0^2}{2R^2} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

Con esto encontramos el cuadrado de la velocidad angular en términos del ángulo θ:

$$\boxed{\dot{\theta}^2(\theta) = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}\mathrm{sen}(\theta)} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

iii) Reemplazando lo anterior en la ecuación radial, despejamos la tensión en función de θ:

$$T(\theta) = \frac{mv_0^2}{R} - 3mg\text{sen}(\theta) \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

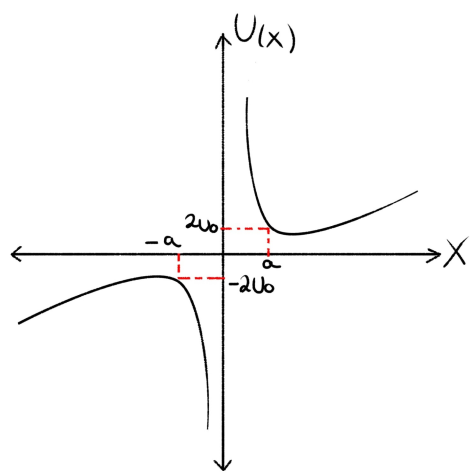
Al introducir $-\pi/2$ en el argumento del seno, minimizamos su valor, maximizando la tensión:

$$\boxed{\max\{T(\theta)\} = \frac{mv_0^2}{R} - 3mg(-1) = \frac{mv_0^2}{R} + 3mg} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

Ocurre en el punto mas bajo de la trayectoria. La barra se encuentra tensionada **(+ 1 pt)** .

P3.-

i) El gráfico de la función energía potencial es **(+ 1,5 pts)** :



ii) Aplicamos la condición de equilibrio:

$$U'(x) = 0 = U_0\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow \boxed{x = \pm a} \quad \textbf{(+ 1 pt)}$$

Estudiamos estabilidad:

$$U''(-a) = U_0\frac{2a}{(-a)^3} = -\frac{2U_0}{a^2} < 0 \Rightarrow \text{Inestable} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

$$U''(a) = U_0\frac{2a}{a^3} = \frac{2U_0}{a^2} > 0 \Rightarrow \text{Estable} \quad \textbf{(+ 0,5 pts)}$$

iii) La frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\boxed{\omega_{P.O} = \sqrt{\frac{U''(a)}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0}{ma^2}}} \quad \textbf{(+ 1 pt)}$$

iv) La condición para calcular puntos de retorno es que la energía cinética se anule:

$$E = K + U = U = U_0\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) = 5U_0 \Rightarrow \boxed{x_{+,-} = \frac{5}{2}a \pm \frac{\sqrt{21}}{2}a} \quad \textbf{(+ 1,5 pts)}$$