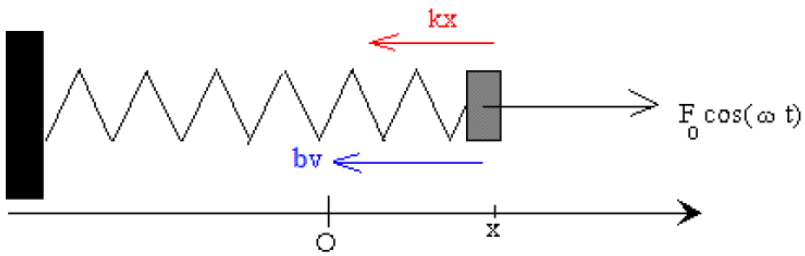
FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar Extra C1 #2



a) La sumatoria de fuerzas es directa de la figura. Aplicando la Segunda Ley de Newton, obtenemos:

$$\sum F_i = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ddot{x}$$

Podemos reordenar los términos de la ecuación de movimiento, de modo que esta queda:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)}$$

Con:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

b) Queremos resolver la ecuación de movimiento para el caso homogéneo, $F(t) \equiv 0$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La cual es una EDO lineal a coeficientes constantes. Aplicando el polinomio característico, $p(\lambda)$:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{+,-} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Los valores propios de la EDO, $\lambda_{+,-}$ (asumiendo que son distintos), nos dan la siguiente base solución:

$$\boxed{x_h(t) = \tilde{A}e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \tilde{B}e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}}$$

c) Analizamos los regímenes de amortiguamiento:

- Caso subamortiguado: $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ ($\omega_0 > \gamma$). La solución homogénea queda:

$$x_h(t) = \tilde{A}e^{(-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t} + \tilde{B}e^{(-\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t}$$

Como la solución debe pertener a los reales, ésta se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\Omega t + \phi)}$$

Con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ la frecuencia de oscilación del sistema y $\tau = 1/\gamma$ el tiempo de decaimiento.

- Caso críticamente amortiguado: $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ ($\omega_0 = \gamma$). La solución homogénea requiere un ajuste para que sea combinación de una base linealmente independiente, al repetirse los valores propios.

  $$\lambda_+ = \lambda_- = \lambda \Rightarrow \boxed{x_h(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\gamma t}}$$

  Lo que corresponde a un MRU amortiguado en el tiempo.
- Caso sobreamortiguado: $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ ($\omega_0 < \gamma$). La solución homogénea queda, con $\lambda_+, \lambda_- < 0$:

  $$x_h(t) = \tilde{A}e^{\lambda_+ t} + \tilde{B}e^{\lambda_- t}$$

  También la podemos escribir en términos de $\beta_1 = -\lambda_+$, $\beta_2 = -\lambda_-$, ambas constantes positivas:

  $$\boxed{x_h(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}}$$

  Con lo que la solución $x_h(t)$ decae exponencialmente en el tiempo.

  Observación: en adelante, nos quedaremos con el caso subamortiguado.

d) Podemos asumir que la oscilación para tiempos muy grandes ($t \gg \tau$) es puramente estacionaria ($x_h \to 0$), de forma que su amplitud y fase están moduladas por la frecuencia de forzaje ω:

$$x_p(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))$$

Vamos a determinar las constantes amplitud $B(\omega)$ y fase $\delta(\omega)$. Introduciremos $x_p(t)$ y sus derivadas en la ecuación de movimiento. Primero, calculamos la velocidad $\dot{x}_p(t)$ y la aceleración $\ddot{x}_p(t)$:

$$\dot{x}_p(t) = -\omega B(\omega)\text{sen}(\omega t + \delta(\omega))$$
$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))$$

A continuación, ahorraremos espacio omitiendo momentáneamente la dependencia de la amplitud y la fase con la frecuencia de forzaje. Introduciendo lo calculado en la ecuación de movimiento completa:

$$-\omega^2 B[\cos(\omega t)\cos(\delta) - \text{sen}(\omega t)\text{sen}(\delta)] - 2\gamma\omega B[\text{sen}(\omega t)\cos(\delta) + \cos(\omega t)\text{sen}(\delta)]$$

$$+\omega_0^2 B[\cos(\omega t)\cos(\delta) - \text{sen}(\omega t)\text{sen}(\delta)] = f_0\cos(\omega t)$$

Factorizamos por dos funciones ortogonales entre si, $\cos(\omega t)$ y $\text{sen}(\omega t)$, e igualamos a 0:

$$\cos(\omega t)[-\omega^2 B\cos\delta - 2\gamma\omega B\text{sen}\delta + \omega_0^2 B\cos\delta - f_0] + \text{sen}(\omega t)[\omega^2 B\text{sen}\delta - 2\gamma\omega B\cos\delta - \omega_0^2 B\text{sen}\delta] = 0$$

Como $\cos(\omega t)$ y $\text{sen}(\omega t)$ son ortogonales, son linealmente independientes. Por el teorema de álgebra lineal que afirma que una combinación lineal de vectores linealmente independientes es igual a cero si y sólo si los escalares ponderando a los vectores son nulos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1) - \omega^2 B\cos(\delta) - 2\gamma\omega B\text{sen}(\delta) + \omega_0^2 B\cos(\delta) - f_0 = 0$$
$$(2) \qquad \omega^2 B\text{sen}(\delta) - 2\gamma\omega B\cos(\delta) - \omega_0^2 B\text{sen}(\delta) = 0$$

(2)/cos(δ):

$$\omega^2 B\tan(\delta) - 2\gamma\omega B - \omega_0^2 B\tan(\delta) = 0$$

$$\tan(\delta)(\omega^2 - \omega_0^2) = 2\gamma\omega \Rightarrow \boxed{\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)}$$

(1)/cos(δ):

$$-\omega^2 B - 2\gamma\omega B\tan(\delta) + \omega_0^2 B - \frac{f_0}{\cos(\delta)} = 0$$

$$B\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{(2\gamma\omega)^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] = \frac{f_0}{\cos(\delta)}$$

Usando la propiedad del coseno de una arcotangente, se tiene que:

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}}$$

Reemplazando esto en la ecuación (1)/cos(δ), se tiene:

$$B = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{(2\gamma\omega)^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}\sqrt{1 + \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (2\gamma\omega)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}$$

$$B = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (2\gamma\omega)^2}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \Rightarrow \boxed{B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}}$$

Así la solución de estado estacionario $\boxed{x_p(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))}$ tiene sus constantes determinadas.

e) Teníamos la solución homogénea y la particular: $x_h(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \phi)$, $x_p(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))$
La solución general será la suma de ellas: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \phi) + B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))$
Evaluando en las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para A y ϕ:

$$x(0) = \Delta = A\cos(\phi) + B\cos(\delta)$$
$$\dot{x}(0) = 0 = -\gamma A\cos(\phi) - \Omega A\mathrm{sen}(\phi) - \omega B\mathrm{sen}(\delta)$$

La resolución de este sistema se deja propuesta como ejercicio. El resultado es:

$$\boxed{A = \sqrt{(B\cos(\delta) - \Delta)^2 + \left[\frac{\gamma}{\Omega}(B\cos(\delta) - \Delta) - \frac{\omega B\mathrm{sen}(\delta)}{\Omega}\right]^2}}$$

$$\boxed{\phi = \arccos\left(\frac{B\cos(\delta) - \Delta}{\sqrt{(B\cos(\delta) - \Delta)^2 + \left[\frac{\gamma}{\Omega}(B\cos(\delta) - \Delta) - \frac{\omega B\mathrm{sen}(\delta)}{\Omega}\right]^2}}\right)}$$

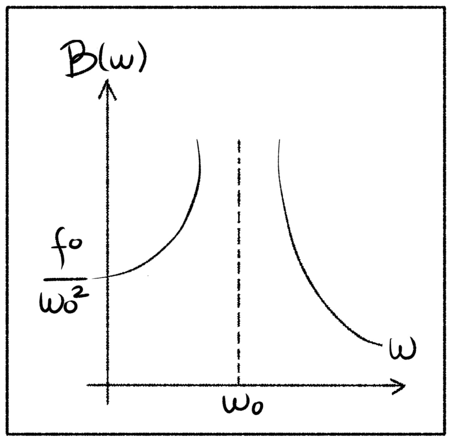
f) <u>Resonancia:</u> *peak* en amplitud B cuando $\omega \to \omega_0$. Estudiamos los casos sin y con amortiguamiento:

- Caso $\gamma = 0$:
  Evaluando en $\omega = 0$, y cuando la frecuencia crece sin cota $\omega \to \infty$:

$$B(0) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2}} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad , \quad \lim_{\omega\to\infty} B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \infty^2)^2}} = \frac{f_0}{\infty} = 0$$

  Estudiamos lo que ocurre en resonancia:

$$\lim_{\omega\to\omega_0} B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{0^2}} = \infty$$



- Caso $\gamma \neq 0$:
  Evaluando en $\omega = 0$, y cuando la frecuencia crece sin cota $\omega \to \infty$:

$$B(0) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 0^2}} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad , \quad \lim_{\omega\to\infty} B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \infty^2)^2 + (2\gamma\infty)^2}} = \frac{f_0}{\infty} = 0$$

  Estudiamos lo que ocurre en resonancia:

$$\lim_{\omega\to\omega_0} B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(2\gamma\omega_0)^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_0}$$