

**FI2001-6:** Mecánica**Profesor:** Claudio Romero Z.**Auxiliar:** Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

## Pauta Auxiliar 5

### Conceptos útiles:

- Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$$

- Velocidad y aceleración en coordenadas intrínsecas:

$$\vec{v} = v\hat{t}$$

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_c\hat{n} = \dot{v}\hat{t} - \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}$$

- Posición, velocidad y aceleración en distintos sistemas de coordenadas:

- Cartesianas:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

- Cilíndricas:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$$

- Esféricas:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + (r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi}$$

- Triedros unitarios:

- Cartesianas:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

- Cilíndricas:

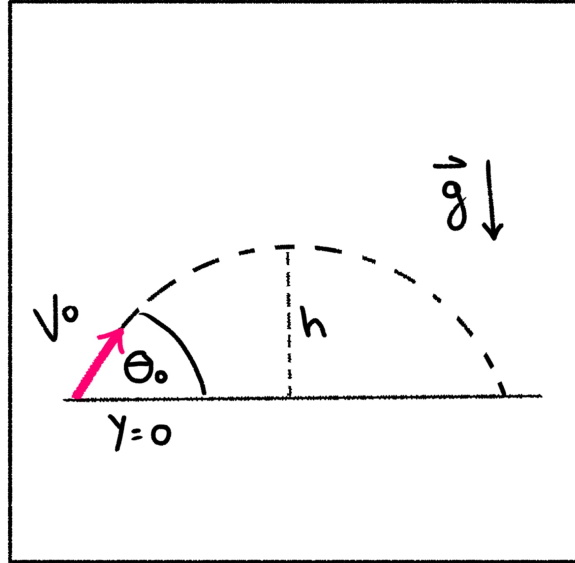
$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z} \quad \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho} \quad \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$$

- Esféricas:

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi} \quad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r} \quad \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$$

**Problemas:**

1. Queremos determinar: i)  $\rho_c$  en el momento inicial ( $y = 0$ ) y ii)  $\rho_c$  en la altura máxima ( $y = h$ ).



- i)  $\rho_c(y = 0)$ : descomponemos la velocidad inicial en sus componentes rectangulares:

$$v_x(0) = v_0 \cos \theta_0 \quad , \quad v_y(0) = v_0 \sin \theta_0 \Rightarrow \vec{v}(0) = v_0 \cos \theta_0 \hat{x} + v_0 \sin \theta_0 \hat{y} \quad , \quad v(0) = v_0$$

La aceleración presente es la de gravedad:  $\vec{a} = -g\hat{y}$ . Con esto, el producto cruz entre  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  es:

$$\vec{v} \times \vec{a} = (v_0 \cos \theta_0 \hat{x} + v_0 \sin \theta_0 \hat{y}) \times (-g\hat{y}) = -gv_0 \cos \theta_0 \hat{z} \Rightarrow \|\vec{v} \times \vec{a}\| = gv_0 \cos \theta_0$$

De esta manera, el radio de curvatura en la posición inicial queda:

$$\rho_c(y = 0) = \frac{v_0^3}{gv_0 \cos \theta_0} = \frac{v_0^2}{g \cos \theta_0}$$

- ii)  $\rho_c(y = h)$ : en la altura máxima se anula la velocidad vertical. Velocidad y rapidez quedan:

$$v_x(h) = v_0 \cos \theta_0 \quad , \quad v_y(h) = 0 \Rightarrow \vec{v}(h) = v_0 \cos \theta_0 \hat{x} \quad , \quad v(h) = v_0 \cos \theta_0$$

La aceleración presente es la de gravedad:  $\vec{a} = -g\hat{y}$ . Con esto, el producto cruz entre  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  es:

$$\vec{v} \times \vec{a} = (v_0 \cos \theta_0 \hat{x}) \times (-g\hat{y}) = -gv_0 \cos \theta_0 \hat{z} \Rightarrow \|\vec{v} \times \vec{a}\| = gv_0 \cos \theta_0$$

De esta manera, el radio de curvatura en la altura máxima queda:

$$\rho_c(y = h) = \frac{v_0^3 \cos^3 \theta_0}{gv_0 \cos \theta_0} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{g}$$

2. Ojo:  $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$ ,  $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{\rho}$ ,  $\dot{\hat{t}} = \frac{v}{\rho_c}\hat{n}$

a) Escribimos posición, velocidad y aceleración, dada la información del enunciado:

$$\vec{r} = \rho_0\hat{\rho} + (h - B\phi)\hat{z}$$

$$\vec{v} = \rho_0\dot{\phi}\hat{\phi} - B\dot{\phi}\hat{z}$$

$$\vec{a} = -\rho_0\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \rho_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - B\ddot{\phi}\hat{z}$$

b) El vector tangente es la velocidad dividida en su norma, la que a su vez corresponde a la rapidez:

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\rho_0\dot{\phi}\hat{\phi} - B\dot{\phi}\hat{z}}{\sqrt{\rho_0^2\dot{\phi}^2 + B^2\dot{\phi}^2}} = \frac{\rho_0\hat{\phi} - B\hat{z}}{\sqrt{\rho_0^2 + B^2}}$$

$$v = \|\vec{v}\| = \dot{\phi}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}$$

c) Usando las fórmulas para la aceleración tangencial y centrípeta, obtenemos:

$$\vec{a}_t = \ddot{\phi}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}\hat{t}$$

$$\vec{a}_c = -\frac{\dot{\phi}^2(\rho_0^2 + B^2)}{\rho_c}\hat{n}$$

d) Por perpendicularidad,  $\vec{a} \cdot \hat{z} = 0$ :

$$(-\rho_0\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \rho_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - B\ddot{\phi}\hat{z}) \cdot \hat{z} = -B\ddot{\phi} = 0$$

Integrando con respecto al tiempo, y usando que  $\phi$  es función monótona, con  $\dot{\phi}(0) = \omega_0$  y  $\phi(0) = 0$ :

$$\phi(t) = \omega_0 t$$

e) Para calcular  $\rho_c$ , necesitamos rapidez y la norma del producto cruz entre velocidad y aceleración:

$$v = \omega_0\sqrt{\rho_0^2 + B^2}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = (\rho_0\omega_0\hat{\phi} - B\omega_0\hat{z}) \times (-\rho_0\omega_0^2\hat{\rho}) = \rho_0^2\omega_0^3\hat{z} + \rho_0B\omega_0^3\hat{\phi}$$

$$\|\vec{v} \times \vec{a}\| = \sqrt{\rho_0^4\omega_0^6 + \rho_0^2B^2\omega_0^6} = \rho_0\omega_0^3\sqrt{\rho_0^2 + B^2}$$

$$\rho_c = \frac{\omega_0^3(\rho_0^2 + B^2)^{3/2}}{\rho_0\omega_0^3(\rho_0^2 + B^2)^{1/2}} = \frac{\rho_0^2 + B^2}{\rho_0}$$

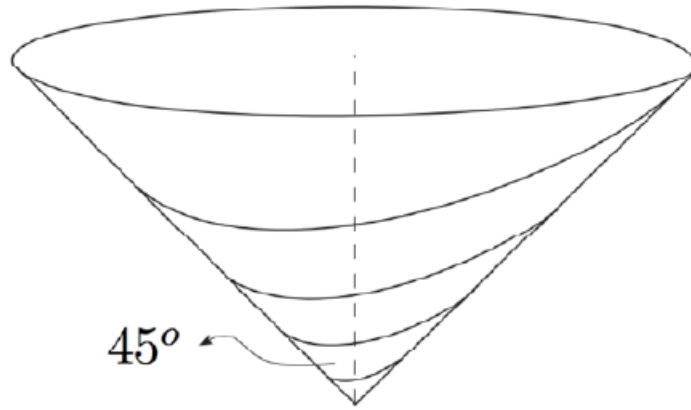
Con esto, la aceleración centrípeta de la parte c) queda:

$$\vec{a}_c = -\frac{\omega_0^2(\rho_0^2 + B^2)}{(\rho_0^2 + B^2)/\rho_0}\hat{n} = -\rho_0\omega_0^2\hat{n}$$

Se tiene que  $\hat{n} = \hat{\rho}$  (piense por qué, le puede ser útil bosquejar la trayectoria de la partícula). Así:

$$\vec{a}_c = -\rho_0\omega_0^2\hat{\rho}$$

3. La cinemática de la partícula es descrita en coordenadas esféricas. Se tienen relaciones para  $r, \theta, \phi$ :



$$\dot{r} = c \Rightarrow r(t) = ct \quad y \quad \ddot{r} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \quad y \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\phi = \frac{2\pi r}{R} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{2\pi \dot{r}}{R} = \frac{2\pi c}{R} \quad y \quad \ddot{\phi} = 0$$

Reemplazando estas relaciones en las expresiones para posición, velocidad y aceleración en esféricas:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r} = ct\hat{r} \\ \vec{v} &= c\hat{r} + \frac{\sqrt{2}\pi cr}{R}\hat{\phi} = c\hat{r} + \frac{\sqrt{2}\pi c^2 t}{R}\hat{\phi} \\ \vec{a} &= -\frac{2\pi^2 c^2 r}{R^2}\hat{r} - \frac{2\pi^2 c^2 r}{R^2}\hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^2}{R}\hat{\phi} = -\frac{2\pi^2 c^3 t}{R^2}\hat{r} - \frac{2\pi^2 c^3 t}{R^2}\hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^2}{R}\hat{\phi} \end{aligned}$$

a) Imponemos que la rapidez sea  $v = \|\vec{v}\| = 3c$ :

$$\sqrt{c^2 + \frac{2\pi^2 c^2}{R^2} r^2} = 3c \Rightarrow c^2 + \frac{2\pi^2 c^2}{R^2} r^2 = 9c^2 \Rightarrow \frac{2\pi^2 c^2}{R^2} r^2 = 8c^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4R^2}{\pi^2} \Rightarrow r_P = \frac{2R}{\pi}$$

b) Conocemos la rapidez,  $v = 3c$ . Evaluamos la velocidad y la aceleración en  $r_P$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= c\hat{r} + 2\sqrt{2}c\hat{\phi} \\ \vec{a} &= -\frac{4\pi c^2}{R}\hat{r} - \frac{4\pi c^2}{R}\hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^2}{R}\hat{\phi} \\ \vec{v} \times \vec{a} &= -\frac{4\pi c^3}{R}\hat{r} \times \hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{r} \times \hat{\phi} - \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\phi} \times \hat{r} - \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\phi} \times \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = -\frac{4\pi c^3}{R}\hat{\phi} - \frac{10\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\theta} + \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{r}$$

$$\|\vec{v} \times \vec{a}\| = \sqrt{\frac{128\pi^2 c^6}{R^2} + \frac{200\pi^2 c^6}{R^2} + \frac{16\pi^2 c^6}{R^2}} = \sqrt{344}\frac{\pi c^3}{R} = \frac{2\sqrt{86}\pi c^3}{R}$$

Juntando estos resultados, obtenemos el radio de curvatura en el punto  $P$ :

$$\boxed{\rho_c = \frac{27c^3}{2\sqrt{86}\pi c^3/R} = \frac{27}{2\sqrt{86}\pi}R}$$

c) La rapidez es  $v = \frac{ds}{dt}$ , con  $s$  la distancia recorrida. Integrando hasta un tiempo  $\tau$ , definido como el momento en que la partícula termina su recorrido, obtenemos el largo de curva:

$$L = \int_0^L ds = \int_0^\tau v dt$$

Como la espiral da 4 vueltas, el ángulo acimutal final será  $\phi_f = 4(2\pi) = 8\pi$ . Calculamos la distancia entre el vértice del cono y la posición final, utilizando la relación entre  $\phi$  y  $r$ :

$$8\pi = \frac{2\pi r_f}{R} \Rightarrow r_f = 4R$$

Como  $r(t) = ct$ , determinamos el tiempo que la partícula tarda en recorrer la espiral:

$$4R = c\tau \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{4R}{c}}$$

Reemplazando el valor de la rapidez en el integrando de la longitud de curva:

$$L = \int_0^{4R/c} \sqrt{c^2 + \frac{2\pi^2 c^2}{R^2} r^2} dt = \int_0^{4R/c} \sqrt{1 + \frac{2\pi^2}{R^2} r^2} c dt$$

Cambiando de dependencia temporal a espacial:  $dr = c dt$ ,  $r \in [0, 4R]$ :

$$L = \int_0^{4R} \sqrt{1 + \frac{2\pi^2}{R^2} r^2} dr$$

Haciendo un cambio de variable,  $u = \frac{\sqrt{2}\pi r}{R}$ ,  $u \in [0, 4\sqrt{2}\pi]$ ,  $dr = \frac{R}{\sqrt{2}\pi} du$ :

$$L = \int_0^{4\sqrt{2}\pi} \sqrt{1 + u^2} \frac{R}{\sqrt{2}\pi} du$$

Dejando las constantes afuera de la integral, y usando los resultados del enunciado, concluimos:

$$L = \frac{R}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( u \sqrt{1 + u^2} + \sinh^{-1} u \right) \right]_0^{4\sqrt{2}\pi} = \frac{R}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( 4\pi \sqrt{2 + 64\pi^2} + \sinh^{-1}(4\sqrt{2}\pi) \right) \right]$$

$$\boxed{L \approx \frac{R}{\sqrt{2}\pi} 160 = \frac{80\sqrt{2}}{\pi} R \approx 36R}$$