FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar 3

Conceptos útiles:

- Trabajo de una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de una curva Γ:

$$W_{\vec{F},\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

- Fuerza conservativa (el círculo indica que la curva es cerrada, $\nabla\times$: rotor, ∇: gradiente):

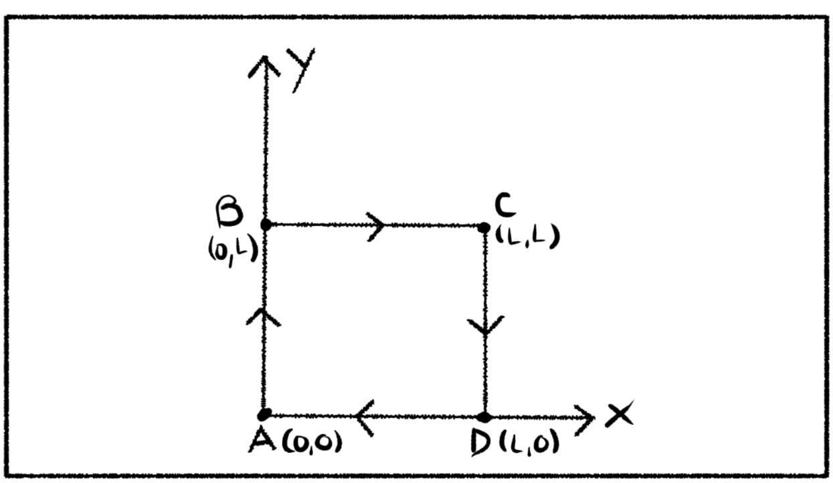
$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

- Potenciales unidimensionales, $U(x)$:
  - Puntos de equilibrio: $U'(x) = \frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow x = x_{eq}$
  - Estabilidad:
    - $U''(x_{eq}) < 0 \Rightarrow$ equilibrio inestable.
    - $U''(x_{eq}) > 0 \Rightarrow$ equilibrio estable.
    - $U''(x_{eq}) = 0 \Rightarrow$ punto silla.
  - Frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a un equilibrio estable: $\omega^2_{P.O.} = U''(x_{eq,est})/m$

Problemas:

1. Para calcular el trabajo que hace la fuerza $\vec{F}$ a lo largo del cuadrado, debemos usar la fórmula:

$$W_{\vec{F},\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$



Como la curva Γ definida por el cuadrado es cerrada, la integral de línea adopta la forma:

$$W_{\vec{F},\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Esto vale 0 para una fuerza conservativa. Podemos determinar si $\vec{F}$ lo es calculando su rotor:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{F} = (0-0)\hat{x} + (0-0)\hat{y} + \left(\frac{2F_0}{L^2}x - 0\right)\hat{z} \neq \vec{0}$$

Como el rotor de la fuerza es no nulo, significa que el valor de la integral de línea cerrada, es decir, el trabajo hecho por la fuerza a lo largo del cuadrado, no es necesariamente cero. Por lo tanto, debemos calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ en cada segmento del cuadrado, recorriéndolo en forma horaria, y luego sumar cada contribución para obtener el total, ya que el trabajo es una magnitud aditiva:

- Segmento $\overline{AB}$: $(0,0) \to (0,L)$. En este caso $x = 0$ e y es variable, por lo que el desplazamiento infinitesimal es $\vec{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} = dy\hat{y}$. Con esto la integral (y por ende, el trabajo) queda:

$$W_{AB} = \int_0^L -F_0\hat{y} \cdot dy\hat{y} = \int_0^L -F_0 dy = -F_0 L$$

- Segmento $\overline{BC}$: $(0,L) \to (L,L)$. Aquí x es variable e $y = L$, por lo que $\vec{dr} = dx\hat{x}$, y dado que la fuerza sólo apunta en la dirección $\hat{y}$, el producto punto $\vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$. O sea, el trabajo $W_{BC} = 0$.
- Segmento $\overline{CD}$: $(L,L) \to (L,0)$. En este caso, $x = L$ e y es variable, pero al evaluar la fuerza $\vec{F}$ con $x = L$, nos da que $\vec{F} = \vec{0}$. Como la fuerza es nula, el trabajo también lo será, $W_{CD} = 0$.
- Segmento $\overline{DA}$: $(L,0) \to (0,0)$. Similar al tramo horizontal $(0,L) \to (L,L)$, nuevamente la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento infinitesimal $\vec{dr}$ son perpendiculares entre sí, con lo que $W_{DA} = 0$.

Finalmente, sumamos todas las contribuciones al trabajo total, obteniendo:

$$\boxed{W_{\vec{F},\Gamma} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = -F_0 L + 0 + 0 + 0 = -F_0 L}$$

Observación: si se recorriera el cuadrado de forma antihoraria, el trabajo daría $-W_{\vec{F},\Gamma} = F_0 L$.

2. Tenemos un potencial unidimensional $U(x)$ definido para un rango restringido de valores de x y el cual consiste en una parte lineal y una sinusoidal. Usando la condición de equilibrio:

$$U'(x) = -\alpha V \operatorname{sen}(\alpha x) - F = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha x) = -\frac{F}{\alpha V}$$

Como $\alpha x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $F \in [-\alpha V, \alpha V]$, la función arcoseno queda bien definida en dominio y recorrido:

$$\boxed{x_{eq} = -\frac{1}{\alpha}\operatorname{arcsen}\left(\frac{F}{\alpha V}\right)}$$

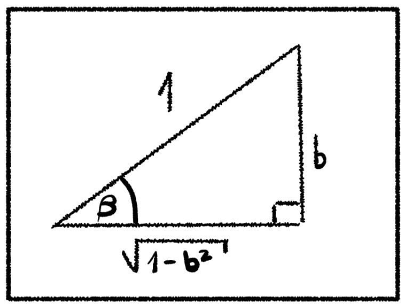
Donde se usó que la función arcoseno es impar, $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}(x)$. Estudiamos estabilidad del punto de equilibrio encontrado, utilizando el criterio de la segunda derivada del potencial:

$$U''(x) = -\alpha^2 V \cos(\alpha x)$$

Evaluando en x_{eq}, y usando el hecho de que el coseno es una función par:

$$U''(x_{eq}) = -\alpha^2 V \cos\left(-\frac{\alpha}{\alpha}\text{arcsen}\left(\frac{F}{\alpha V}\right)\right) = -\alpha^2 V \cos\left(-\text{arcsen}\left(\frac{F}{\alpha V}\right)\right) = -\alpha^2 V \cos\left(\text{arcsen}\left(\frac{F}{\alpha V}\right)\right)$$

Notamos que:



$$\text{sen}(\beta) = \frac{b}{1} = b \Rightarrow \beta = \text{arcsen}(b)$$

$$\cos(\beta) = \cos(\text{arcsen}(b)) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{1} = \sqrt{1-b^2}$$

Reemplazando para este caso, $b = \frac{F}{\alpha V}$, la segunda derivada del potencial evaluada en x_{eq} queda:

$$U''(x_{eq}) = -\alpha^2 V \sqrt{1 - \left(\frac{F}{\alpha V}\right)^2}$$

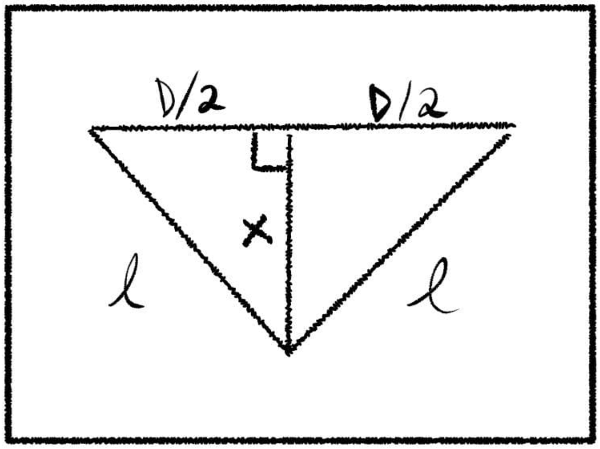
Ahora estamos en condiciones de analizar el signo de $U''(x_{eq})$. El punto de equilibrio x_{eq} es:

- Inestable, si $U''(x_{eq}) < 0 \Rightarrow V > 0$
- Estable, si $U''(x_{eq}) > 0 \Rightarrow \boxed{V < 0}$
- Como $V \neq 0$, $\alpha > 0$, no hay posibilidad de que sea punto silla.

La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable es:

$$\boxed{\omega_{P.O.} = \sqrt{-\frac{\alpha^2 V}{m}\sqrt{1 - \left(\frac{F}{\alpha V}\right)^2}}}$$

3. Hacemos un bosquejo del triángulo isósceles que se forma entre los segmentos de cuerda que sostienen a la masa y la distancia que separa a la polea izquierda del extremo al que está suejetado la cuerda:



a) Sumando todos los segmentos de cuerda, obtenemos su largo total, $L = 2l + y$. Donde:

$$l^2 = x^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{4}} \Rightarrow L = 2\sqrt{x^2 + \frac{D^2}{2}} + y$$

Con esto, encontramos una expresión explícita para la posición de la masa de la izquierda, en términos de la posición de la masa central:

$$\boxed{y(x) = L - \sqrt{4x^2 + D^2}}$$

La energía potencial asociada al sistema de las dos masas, es únicamente la gravitatoria:

$$U = -mgx - mgy \Rightarrow \boxed{U(x) = -mg(x + L - \sqrt{4x^2 + D^2})}$$

Calculamos los puntos de equilibrio:

$$U'(x) = -mg\left(1 - \frac{4}{2}\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + D^2}}\right) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + D^2}}$$

$$4x^2 + D^2 = 16x^2 \Rightarrow 12x^2 = D^2 \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \pm\sqrt{\frac{D^2}{12}} = \pm\frac{D}{2\sqrt{3}}}$$

Estudiamos estabilidad de los puntos de equilibrio. Primero calculamos $U''(x)$:

$$U''(x) = \frac{d}{dx}\left[4mg\frac{x}{\sqrt{4x^2 + D^2}}\right]$$

$$U''(x) = 4mg\frac{1\sqrt{4x^2 + D^2} - x\frac{4x}{\sqrt{4x^2+D^2}}}{(\sqrt{4x^2 + D^2})^2} = 4mg\frac{\sqrt{4x^2 + D^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+D^2}}}{4x^2 + D^2}$$

Evaluando en $x = x_{eq} = \pm\frac{D}{2\sqrt{3}}$:

$$U''\left(\pm\frac{D}{2\sqrt{3}}\right) = 4mg\frac{\sqrt{4\frac{D^2}{12}+D^2} - \frac{\frac{4D^2}{12}}{\sqrt{\frac{4D^2}{12}+D^2}}}{\frac{4D^2}{12}+D^2} = 4mg\frac{\sqrt{\frac{4D^2}{3}} - \frac{\frac{D^2}{3}}{\sqrt{\frac{4D^2}{3}}}}{\frac{4D^2}{3}}$$

$$U''\left(\pm\frac{D}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{3mg}{D^2}\left(\frac{2D}{\sqrt{3}} - \frac{D^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2D}\right) = \frac{3mgD}{D^2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$U''\left(\pm\frac{D}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{3mg}{D}\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6} = \frac{3mg}{D}\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}mg}{2D} > 0$$

Con lo que ambos puntos de equilibrio son estables. Por simetría y la forma en la que definimos x, nos quedamos con $\boxed{x_{eq} = \frac{D}{2\sqrt{3}}} > 0$ (podemos asumir que la masa central nunca supera $x = 0$).

b) La energía cinética total será la suma de la de cada masa:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Usando la regla de la cadena:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} = -\frac{4x}{\sqrt{4x^2+D^2}}\dot{x}$$

Con esto, escribimos la energía cinética en términos de la posición y la velocidad:

$$K(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{16mx^2}{4x^2+D^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{16x^2}{4x^2+D^2}\right)$$

$$\boxed{K(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{20x^2+D^2}{4x^2+D^2}\right)\dot{x}^2}$$

c) Cerca del equilibrio, la energía cinética sólo depende de la velocidad:

$$K(x_{eq},\dot{x}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{20x_{eq}^2+D^2}{4x_{eq}^2+D^2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{20\frac{D^2}{12}+D^2}{4\frac{D^2}{12}+D^2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\frac{5D^2}{3}+\frac{3D^2}{3}}{\frac{4D^2}{3}}\right)\dot{x}^2$$

$$\boxed{K(x_{eq},\dot{x}) = \frac{1}{2}m(2)\dot{x}^2 = m\dot{x}^2}$$

La frecuencia de pequeñas oscilaciones, considerando que la masa del sistema es $2m$, es:

$$\omega_{P.O.}^2 = \frac{U''(x_{eq})}{2m} = \frac{3\sqrt{3}mg}{2D}\frac{1}{2m} = \frac{3\sqrt{3}g}{4D}$$

$$\boxed{\omega_{P.O.} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{4D}}}$$