FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

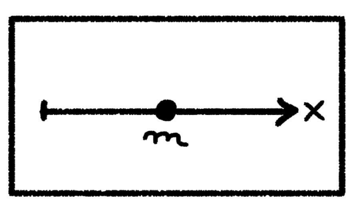
Pauta Auxiliar 1.

Conceptos útiles:

- EDO: ecuación de la forma
$$f(t, x(t), \dot{x}.\ddot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$$
Mas condiciones iniciales (CI) dadas $x(0)$, $\dot{x}(0)$,...,$x^{(n-1)}(0)$, tiene solución única $x(t)$.
  - 1er orden: $\dot{x} = \alpha x \Rightarrow x(t) = Ae^{\alpha t}$
  - 2do orden: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$
- Truco usando la regla de la cadena, para pasar de dependencia temporal a dependencia espacial:
$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = v\frac{dv}{dx} = \dot{v}$$
- Truco de multiplicar por la velocidad, usando derivadas totales con respecto al tiempo:
$$x\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2) \quad \text{y} \quad \dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2)$$
- Segunda Ley de Newton:
$$\vec{F}_{\text{Neta}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a}$$
En una dimensión: $F_{\text{Neta}} = m\ddot{x}$
  - Idea: dadas F_i o F_{Neta} mas condiciones iniciales, tratar de encontrar $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ explícitamente.

Problemas:

1. Se tiene el caso de una fuerza dependiente del tiempo $F(t)$, que actúa a lo largo del eje X:



$$\vec{F}(t) = Ae^{-nt}\text{sen}(\omega t)\hat{x} \quad ; \quad \hat{x} = (1, 0, 0)$$

Con condiciones iniciales dadas para la posición y la velocidad: $x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = v_0$.
Ya que estamos en una dimensión, y usando el hecho de que $n = 0$, la ecuación de movimiento queda:

$$F_{\text{Neta}} = Ae^{-0t}\text{sen}(\omega t) = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{A}{m}\text{sen}(\omega t)$$

Integrando al lado izquierdo con respecto a la velocidad y al lado derecho con respecto al tiempo:

$$\int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)} d\dot{x} = \frac{A}{m}\int_0^t \mathrm{sen}(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = -\frac{A}{m\omega}\cos(\omega t)\Big|_0^t = \frac{A}{m\omega}\Big[1-\cos(\omega t)\Big]$$

Así encontramos la velocidad en función del tiempo:

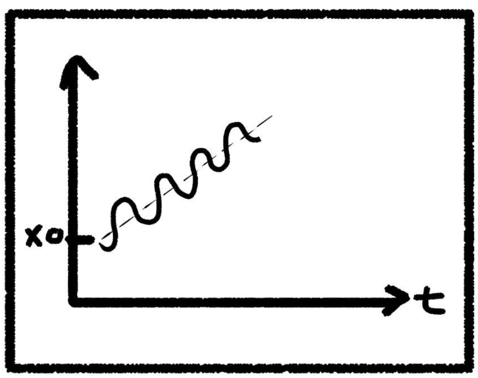
$$\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = v_0 + \frac{A}{m\omega}\Big[1-\cos(\omega t)\Big]} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{A}{m\omega} - \frac{A}{m\omega}\cos(\omega t)$$

Integramos nuevamente con respecto a la posición a la izquierda y con respecto al tiempo a la derecha:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \Big[v_0 + \frac{A}{m\omega} - \frac{A}{m\omega}\cos(\omega t)\Big]dt \Rightarrow x(t) - x(0) = \Big(v_0 + \frac{A}{m\omega}\Big)t - \frac{A}{m\omega}\int_0^t \cos(\omega t)dt$$

Así encontramos la posición en función del tiempo:

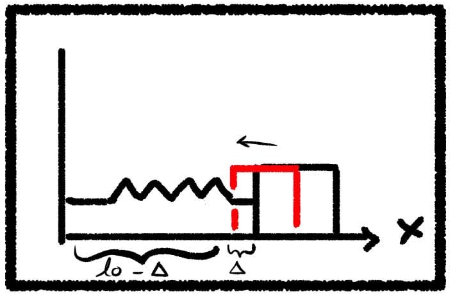
$$x(t) - x(0) = \Big(v_0 + \frac{A}{m\omega}\Big)t - \frac{A}{m\omega^2}\mathrm{sen}(\omega t)\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \Big(v_0 + \frac{A}{m\omega}\Big)t - \frac{A}{m\omega^2}\mathrm{sen}(\omega t)}$$



El movimiento consiste en un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) + un movimiento armónico. Graficando la posición en función del tiempo, observamos una oscilación en torno a la recta definida por el MRU. Analizando casos límites para las constantes que definen el problema:

- Si $A \to 0$ o $m\omega \to \infty$, se recupera MRU, que corresponde a fuerza nula u oscilación muy rápida.
- **Observación:** El caso con $n \neq 0$ se encuentra resuelto en la Auxiliar #2.

2. Se tiene el caso de una fuerza dependiente de la posición $F(x)$, que actúa a lo largo del eje X:



$$F(x) = -k(x - l_0) \quad \text{(Ley de Hooke)}$$

Con condiciones iniciales dadas para la posición y la velocidad: $x(t=0) = l_0 - \Delta$ y $\dot{x}(t=0) = 0$.
Usando la 2da Ley de Newton, considerando la fuerza elástica como la única que actúa en el eje X:

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - l_0)$$

Se usa cambio de variable, $u(t) = x(t) - l_0 \Rightarrow \dot{u} = \dot{x}$, $\ddot{u} = \ddot{x}$. Definiendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, la ecuación queda:

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u \Rightarrow u(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

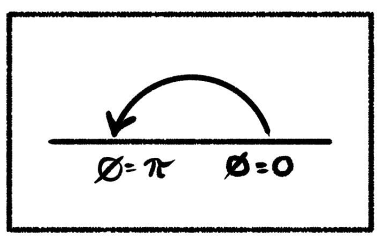
Que es la solución conocida al Movimiento Armónico Simple. Volviendo a la variable original $x(t)$:

$$x(t) = l_0 + u(t) \Rightarrow x(t) = l_0 + A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Todavía nos queda encontrar la amplitud A y la fase ϕ utilizando las condiciones iniciales:

$$x(0) = l_0 + A\cos(\omega_0 0 + \phi) = l_0 - \Delta \Rightarrow A\cos(\phi) = -\Delta$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega_0 \text{sen}(\omega_0 0 + \phi) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi$$



Escogiendo $\phi = 0$ ($\phi = \pi$ también es una solución válida), obtenemos que $A = -\Delta$, y así:

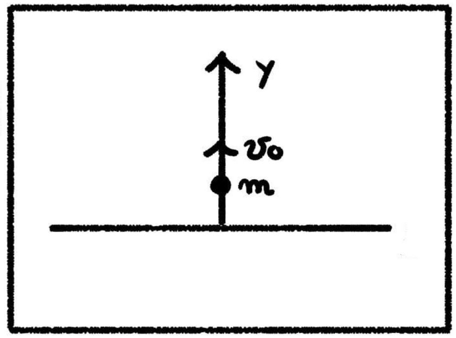
$$\boxed{x(t) = l_0 - \Delta\cos(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = \omega_0 \Delta \text{sen}(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = \omega_0^2 \Delta\cos(\omega_0 t)}$$

3. **Observación:** se resolverá para $n = 1$, el caso $n = 2$ está en la Pauta Auxiliar 1 - Propuesto P3. Por comodidad, el orden de resolución será distinto. Al final se darán las respuestas en orden.

   Se tiene el caso de una fuerza dependiente de la velocidad $F(v)$, con $v = \dot{y}$, actuando en el eje Y.



   Notamos que de subida, la fuerza adopta la forma $F(v) = -\gamma v$, con $v > 0$, con lo que la fuerza apunta hacia abajo y se opone al movimiento. Por otro lado, de bajada, la fuerza mantiene su misma forma $F(v) = -\gamma v$, pero ahora con $v < 0$, con lo que la fuerza apunta hacia arriba, también oponiéndose al movimiento. Esto ocurre ya que es una fuerza de roce o fricción. Aplicando la 2da Ley de Newton:

$$\sum_{i=1}^{2} F_i = -mg - \gamma v = m\dot{v}$$

   Ya que las únicas dos fuerzas actuando sobre m son el peso y el roce viscoso. Reescribimos tal que:

$$-\frac{mg}{\gamma} - v = \frac{m}{\gamma}\dot{v}$$

   Notamos que si la aceleración $\dot{v} = 0$, se alcanza la velocidad terminal, la cual posee módulo $v_\infty = mg/\gamma$ Reemplazando este valor, y usandoo el truco para cambiar a dependencia espacial, obtenemos:

$$-v_\infty - v = \frac{m}{\gamma} v \frac{dv}{dy}$$

   Integrando la dependencia con la posición al lado izquierdo, y la con la velocidad al lado derecho:

$$-\frac{\gamma}{m}\int_0^y dy = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{v_\infty + v} dv$$

   Teniendo cuidado de usar las condiciones iniciales en los límites inferiores de integración. Vemos que:

$$-\frac{\gamma}{m} y = \int_{v_0}^{v} \frac{v_\infty + v - v_\infty}{v_\infty + v} dv = \int_{v_0}^{v} dv - v_\infty \int_{v_0}^{v} \frac{1}{v_\infty + v} dv = v - v_0 - v_\infty \ln\left|v_\infty + v\right|_{v_0}^{v}$$

   Como $v_\infty + v > 0$ (ya que tanto v_∞ como v son positivas), podemos prescindir del valor absoluto. Evaluando los límites de integración, obtenemos una relación funcional entre posición y velocidad:

$$-\frac{\gamma}{m} y = v - v_0 - v_\infty \ln\left(\frac{v_\infty + v}{v_\infty + v_0}\right)$$

En el punto mas alto de la trayectoria, $y = h$, la velocidad se anula $v(h) = 0$. Esto nos permite encontrar explícitamente el valor de la altura máxima h en términos de los parámetros del problema:

$$h = \frac{mv_0}{\gamma} + \frac{mv_\infty}{\gamma}\ln\left(\frac{v_\infty}{v_0 + v_\infty}\right)$$

Para el descenso, se utiliza la misma ecuación de movimiento e integrales, dado nuestro sistema de referencia estático ($y > 0$ hacia arriba, $y < 0$ hacia abajo). Lo que cambian son los límites de integración:

$$-\frac{\gamma}{m}\int_h^y dy = \int_0^v \frac{v}{v_\infty + v}dv \Rightarrow -\frac{\gamma}{m}(y-h) = v - v_\infty \ln\Big|v_\infty + v\Big|_0^v$$

Esta vez, $v < 0$, pero siempre será mayor (menor en módulo) que la velocidad terminal, es decir $v > -v_\infty$. Con lo que podemos prescindir del valor absoluto. Evaluando los límites de integración:

$$-\frac{\gamma}{m}(y-h) = v - v_\infty \ln\left(\frac{v_\infty + v}{v_\infty}\right)$$

Es una relación funcional entre posición y velocidad. Cuando $y = 0$ se alcanza la velocidad final v_f:

$$\frac{\gamma h}{m} = v_f - v_\infty \ln\left(\frac{v_\infty + v_f}{v_\infty}\right)$$

Dados valores de las constantes del problema (γ, m, v_0 y h ya calculada), es posible resolver mediante un algoritmo numérico para obtener el valor de la velocidad final. Este es un resultado válido.

P3: Respuestas

a) Caso general: $m\dot{v} = -mg - \gamma v|v|^{n-1}$
- Subida: $m\dot{v} = -mg - \gamma v^n$
- Bajada: $m\dot{v} = -mg - \gamma v(-v)^{n-1} = -mg + (-1)^n \gamma v^n$

b)

$$v_\infty = \left|\frac{(-1)^n mg}{\gamma}\right|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{mg}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n}}$$

c)
- Subida:

$$-\frac{\gamma}{m}y = v - v_0 - v_\infty \ln\left(\frac{v_\infty + v}{v_\infty + v_0}\right)$$

- Bajada:

$$-\frac{\gamma}{m}(y-h) = v - v_\infty \ln\left(\frac{v_\infty + v}{v_\infty}\right)$$

d)

$$h = \frac{mv_0}{\gamma} + \frac{mv_\infty}{\gamma}\ln\left(\frac{v_\infty}{v_0 + v_\infty}\right)$$

e)

$$\frac{\gamma h}{m} = v_f - v_\infty \ln\left(\frac{v_\infty + v_f}{v_\infty}\right)$$