Pauta Problema tipo Control 1

Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliares: Jerónimo Herrera G. - Rodrigo Catalán B.
Ayudantes: Gerald Barnert S. - Diana Escobar C.

P1.-

a) Ya que las posiciones de equilibrio de los resortes de la izquierda y de la derecha, medidas desde la pared izquierda, son l y $3l$ respectivamente, la energía potencial de la masa m a una distancia x de la pared izquierda, una vez que la rigidez del resorte de la derecha se hace $3k$, será:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-l)^2 + \frac{1}{2}3k(x-3l)^2$$

Encontramos la posición de equilibrio x_{eq} derivando e igualando a 0 el potencial $U(x)$:

$$U'(x) = 0 = k(x-l) + 3k(x-3l) \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{5}{2}l}$$

b) Antes de emplear el cambio de variable, podemos encontrar la ecuación de movimiento para x, si aplicamos el hecho de que la energía mecánica total E se conserva (o usar 2da Ley de Newton):

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-l)^2 + \frac{1}{2}3k(x-3l)^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + k(x-x_{eq})\dot{x} + 3k(x-x_{eq})\dot{x}$$

Como la velocidad no es idénticamente nula, podemos dividir por $\dot{x}$. Reescribiendo, se tiene:

$$\ddot{x} + \frac{4k}{m}(x-x_{eq}) = 0$$

Definimos la variable $\eta(t) = x(t) - x_{eq}$, y notando que como x_{eq} es una constante, $\dot{\eta} = \dot{x}$, $\ddot{\eta} = \ddot{x}$:

$$\boxed{\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}}$$

Corresponde a la ecuación de movimiento homogénea de la masa m, con frecuencia propia ω_0.

c) La solución general a la ecuación de movimiento en términos de la variable η es:

$$\eta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Aplicando las condiciones iniciales, $\eta(0) = x(0) - x_{eq} = 2l - \frac{5l}{2} = -\frac{l}{2}$. $\dot{\eta}(0) = 0$:

$$\boxed{\eta(t) = -\frac{l}{2}\cos(\omega_0 t)}$$

d) La nueva ecuación de movimiento para m en función de η, considerando el roce viscoso, es:

$$\ddot{\eta} + 2\gamma\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0$$

Con $\gamma = \frac{b}{2m}$. Como el régimen es subamortiguado, $\gamma < \omega_0$. La solución general en este caso es:

$$\eta(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \phi) \Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Con $\tau = \frac{1}{\gamma}$ y donde Ω es la frecuencia de oscilación del sistema.

e) Ahora, la ecuación de movimiento es la de un oscilador armónico amortiguado y forzado:

$$\ddot{\eta} + 2\gamma\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \theta_0)$$

Cuya solución de estado estacionario ($t >> \tau$) viene dada por:

$$\eta_{est}(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))$$

Donde $\boxed{\omega}$ es la frecuencia de oscilación en estado estacionario, y:

$$B(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

Tomando el límite $\omega >> \omega_0$ se tiene que $\omega^2 - \omega_0^2 \approx \omega^2$, y con ello:

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + 4\gamma^2}}$$

$$\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma}{\omega}\right)$$

La diferencia de fase entre la fuerza aplicada y el desplazamiento de la masa m es:

$$\boxed{\Delta\varphi = \left|\theta_0 - \arctan\left(\frac{2\gamma}{\omega}\right)\right|}$$

La potencia entregada por la fuerza externa es:

$$P = \frac{dW}{dt} = F(t)\dot{\eta}_{est}(t) = -\frac{F_0^2}{m\sqrt{\omega^2 + 4\gamma^2}}\text{sen}(\omega t + \delta(\omega))\cos(\omega t + \theta_0)$$

La potencia promedio se calcula como:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

Donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el periodo de oscilación.

Reemplazando la expresión para la potencia $P(t)$, y dejando las constantes afuera de la integral:

$$\langle P\rangle = -\frac{\omega F_0^2}{2\pi m\sqrt{\omega^2+4\gamma^2}} \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(\omega t+\delta(\omega))\cos(\omega t+\theta_0)dt}_{} \Big\} I$$

Usando las propiedades de suma de ángulos dentro del seno y el coseno, la integral queda:

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} \Big[(\text{sen}(\omega t)\cos(\delta(\omega)) + \cos(\omega t)\text{sen}(\delta(\omega)))(\cos(\omega t)\cos(\theta_0) - \text{sen}(\omega t)\text{sen}(\theta_0))\Big] dt$$

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} \Big[\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\delta(\omega))\cos(\theta_0) - \text{sen}^2(\omega t)\cos(\delta(\omega))\text{sen}(\theta_0)$$

$$+\cos^2(\omega t)\text{sen}(\delta(\omega))\cos(\theta_0) - \text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\text{sen}(\delta(\omega))\text{sen}(\theta_0))\Big] dt$$

Notamos que:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)dt = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{d}{dt}(\text{sen}^2(\omega t))dt = \frac{1}{2\omega}(\text{sen}^2(2\pi) - \text{sen}^2(0)) = 0$$

Con lo que la integral se reduce a:

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} \Big[-\text{sen}^2(\omega t)\cos(\delta(\omega))\text{sen}(\theta_0) + \cos^2(\omega t)\text{sen}(\delta(\omega))\cos(\theta_0)\Big] dt$$

Usando las propiedades de ángulo doble para el seno y el coseno cuadrado, se tiene que:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}^2(\omega t)dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t)dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt$$

La integral del coseno del doble del ángulo en un periodo completo se anula, con lo que:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}^2(\omega t)dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t)dt = \frac{\pi}{\omega}$$

Y el resultado de la integral queda:

$$I = \frac{\pi}{\omega}\Big[-\cos(\delta(\omega))\text{sen}(\theta_0) + \text{sen}(\delta(\omega))\cos(\theta_0)\Big]$$

Recordando que $\delta(\omega) = \arctan(2\gamma/\omega)$, y usando las propiedades de coseno y seno de arcotangente:

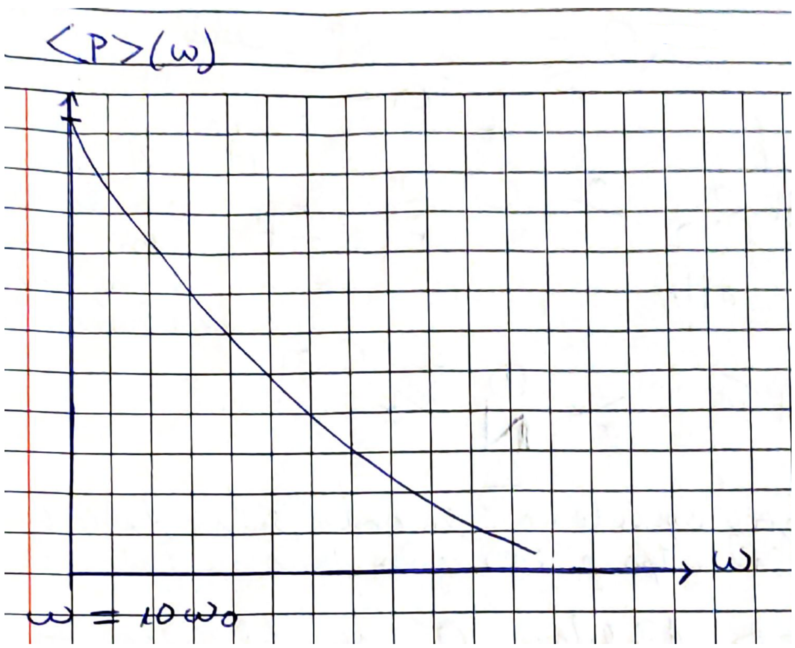
$$\cos(\arctan(2\gamma/\omega)) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\gamma/\omega)^2}}$$

$$\text{sen}(\arctan(2\gamma/\omega)) = \frac{2\gamma/\omega}{\sqrt{1+(2\gamma/\omega)^2}}$$

Finalmente, la potencia promedio que entrega la fuerza externa, en función de la frecuencia ω, es:

$$\langle P\rangle(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\sqrt{\omega^2+4\gamma^2}}\left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_0)-\cos(\theta_0)2\gamma/\omega}{\sqrt{1+(2\gamma/\omega)^2}}\right]$$

Para construir el gráfico, notamos que como la potencia es proporcionada, $\langle P\rangle(\omega) > 0$ y recordamos que $\omega >> \omega_0$. Estudiando el límite $\omega \to \infty$, vemos que 0 es asíntota horizontal. Con lo que fijando el origen en, digamos, $\omega = 10\omega_0$, debiéramos obtener una función tipo inversa, $\langle P\rangle(\omega) \sim 1/\omega$.



Por otro lado, si quisiéramos representar el caso completo para una $\omega \geq 0$ cualquiera, nos daría una forma de campana, con intersección del eje potencia promedio $\langle P\rangle(0) = 0$ y máximo en $\omega = \omega_0$ (resonancia). Haciéndole zoom para valores de $\omega >> \omega_0$ se debiera hallar el mismo gráfico anterior.