Auxiliar 6

31/03

P1/ a) Se quiere determinar la aceleración tangencial, que será la componente en $\hat{t}$ de $\vec{a}$, es decir:

$$a_{\hat{t}} = \vec{a}\cdot\hat{t} = \vec{a}\cdot \vec{v}/|\vec{v}|$$

por definición de $\hat{t}$

Recordemos que la partícula se mueve con rapidez v_0, es decir:

$$v_0^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

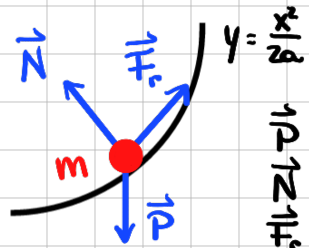
Truquito jeje

Derivamos esta expresión respecto al tiempo

$$\underbrace{\cancel{\frac{dv_0^2}{dt}}}_{0 \text{ por ser cte}} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2(\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{a}}_{\text{Lo que buscamos}}) = 0$$

De aquí tenemos $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \rightarrow \boxed{a_{\hat{t}} = \vec{a}\cdot\vec{v}/|\vec{v}| = 0}$

b) Vemos el DCL y planteamos 2da Ley de Newton



$\vec{P} = mg(-\hat{j})$

$\vec{N} = N\hat{n}$

$\vec{F}_r = -c(y)\vec{v}$

$$m\vec{a} = N\hat{n} - mg\hat{j} - c(y)\vec{v}$$

Vemos la proyección en el vector tangente.

$$m\cancel{\vec{a}\cdot\hat{t}}^{\,0} = N\cancel{(\hat{n}\cdot\hat{t})}^{\,0} - mg(\hat{j}\cdot\hat{t}) - c(y)\cancel{(\vec{v}\cdot\hat{t})}^{\,v_0}$$

$$0 = -mg(\hat{j}\cdot\hat{t}) - v_0 c(y) \rightarrow c(y) = -\frac{mg}{v_0}(\hat{j}\cdot\hat{t})$$

Falta determinar $\hat{t}$. Usamos definición ($\hat{t} = \vec{v}/|\vec{v}|$). Sabemos que en coordenadas cartesianas:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

La partícula está restringida a moverse por la curva $y = x^2/2a$, o bien $x = \sqrt{2ay}$ (se puede pues $x, y > 0$). Es decir $x = x(y)$, y así:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} = \dot{y}\left(\frac{dx}{dy}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right) = \dot{y}\left(\frac{a}{\sqrt{2ay}}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)$$

Sacamos módulo^2 y despejamos $\dot{y}$.

$$v_0^2 = \dot{y}^2\left(\frac{a}{2y} + 1\right) \Rightarrow \dot{y} = \pm v_0\sqrt{\frac{2y}{a+2y}}$$

Como la partícula está cayendo, tomamos $\dot{y} < 0$, y así $\hat{t}$ será:

$$\hat{t} = -\sqrt{\frac{a}{a+2y}}\,\hat{\imath} - \sqrt{\frac{2y}{a+2y}}\,\hat{\jmath}$$

Queríamos $\hat{t}\cdot\hat{\jmath}$

$$\hat{t}\cdot\hat{\jmath} = -\sqrt{\frac{2y}{a+2y}}\,\hat{\jmath}$$

Se tiene $c(y)$:

$$\boxed{c(y) = \frac{mg}{v_0}\sqrt{\frac{2y}{a+2y}}}$$

c) De la 2^{da} Ley de Newton, vemos ahora la proyección en $\hat{n}$.

$$m\vec{a}\cdot\hat{n} = N(\overset{1}{\cancel{\hat{n}\cdot\hat{n}}}) - mg(\hat{\jmath}\cdot\hat{n}) - c(y)(\overset{0}{\cancel{\vec{v}\cdot\hat{n}}})$$

$$N = ma_{\hat{n}} + mg(\hat{\jmath}\cdot\hat{n})$$

Tenemos que determinar $\hat{n}$ y $a_{\hat{n}}$. Por definición $\hat{n} = \dot{\hat{t}}/|\dot{\hat{t}}|$, $\hat{t} = \hat{t}(y)$

$$\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{dy}\frac{dy}{dt} = \dot{y}\frac{d\hat{t}}{dy} = -\dot{y}\left(\frac{-\sqrt{a}}{(2y+a)^{3/2}}\hat{\imath} + \frac{a}{\sqrt{2y}\,(2y+a)^{3/2}}\hat{\jmath}\right)$$

Derivé por Wolfram xd

$$|\dot{\hat{t}}| = \overset{-\dot{y}}{|\dot{y}|}\sqrt{\frac{a}{(2y+a)^3} + \frac{a^2}{2y(2y+a)^3}} = \frac{-\dot{y}}{2y+a}\sqrt{\frac{a}{2y}}$$

Se tiene $\hat{n}$:

$$\hat{n} = -\sqrt{\frac{2y}{a+2y}}\,\hat{\imath} + \sqrt{\frac{a}{a+2y}}\,\hat{\jmath}$$

Para $a_{\hat{n}}$, recordemos $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d(v_0\hat{t})/dt = v_0\dot{\hat{t}} = V_0|\dot{\hat{t}}|\hat{n}$.

$$\vec{a} = \frac{-V_0\dot{y}}{2y+a}\sqrt{\frac{a}{2y}}\,\hat{n}$$

$$a_{\hat{n}} = \vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{-V_0\dot{y}}{2y+a}\sqrt{\frac{a}{2y}}$$

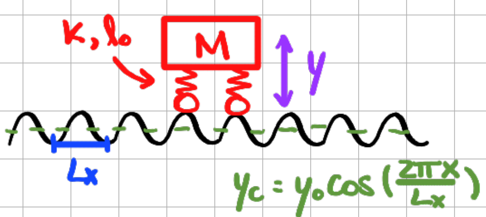
Reemplazando $\dot{y}$:

$$a_{\hat{n}} = \frac{V_0^2\sqrt{a}}{(2y+a)^{3/2}}$$

Finalmente se tiene N:

$$\boxed{N = \frac{mV_0^2\sqrt{a}}{(2y+a)^{3/2}} + mg\sqrt{\frac{a}{a+2y}}}$$

P2// a)



Recordemos la ecuación del oscilador forzado está dada por:

$$\ddot{y} + w_0^2 y = Q_0\cos(\Omega_0 t)$$

Mediante 2da Ley de Newton planteamos ecuación de movimiento.

$$\vec{P} = -mg\hat{j} \quad \wedge \quad \vec{F_e} = -K([y-y_c]-l_0)\hat{j}$$

$$m\vec{a} = -(mg + K(y-y_c-l_0))\hat{j}$$

Tenemos $\vec{v} = V\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \rightarrow \vec{a} = \ddot{y}\hat{j}$. Así:

$$\ddot{y} + \frac{K}{m}(y-l_0) + g = \frac{K}{m}y_0\cos\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right)$$

Sabemos $x = v\cdot t$ y así identificamos Ω_0.

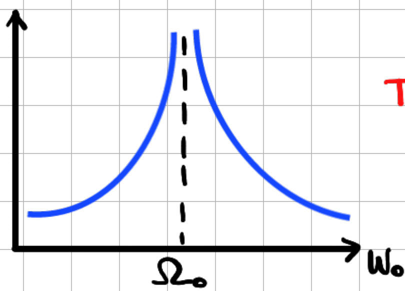
$$\ddot{y} + \frac{K}{m}(y-l_0) + g = \frac{K}{m}y_0\cos\left(\frac{2\pi}{L_x}V\cdot t\right) \Rightarrow \boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi V}{L_x}}$$

b) Sea $\tilde{y} = y - l_0 + \frac{mg}{K} \Rightarrow \dot{\tilde{y}} = \dot{y} \wedge \ddot{\tilde{y}} = \ddot{y}$.

$$\ddot{\tilde{y}} + \frac{K}{m}\tilde{y} = \frac{K}{m}y_0\cos(\Omega_0 t)$$

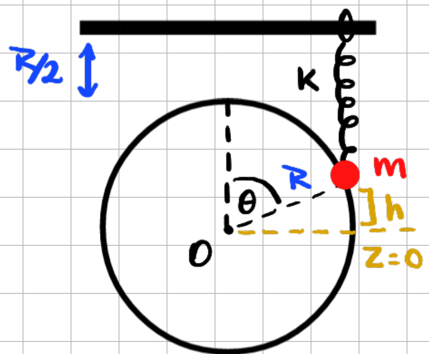
La solución será:

$$y(t) = A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t) + \frac{K y_0}{m(w_0^2 - \Omega_0^2)}\cos(\Omega_0 t)$$



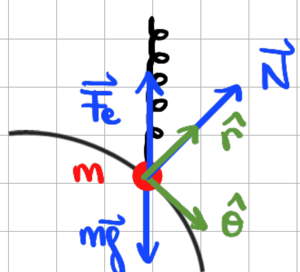
Tiende a ∞
con $w_0 \to \Omega_0$

P3//



Vemos las restricciones del problema:

- Como estamos en el plano, tomamos $\phi = 0$
- Como el radio no cambia $\vec{r} = R\hat{r}$
- $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$

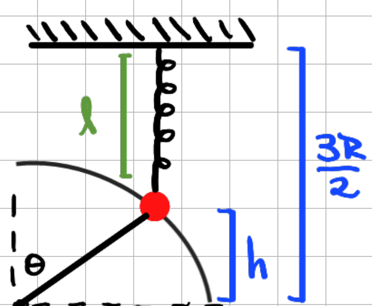


Trabajamos directamente con potenciales

$$U_{\vec{P}} = mgh = mgR\cos(\theta)$$

$$U_{\vec{Fe}} = \frac{k}{2}\left(l - \frac{R}{2}\right)^2$$

Para determinar potencial elástico falta obtener l.



$$l = \frac{3R}{2} - h = R\left(\frac{3}{2} - \cos(\theta)\right)$$

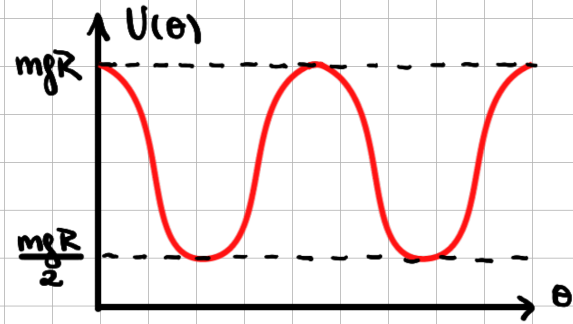
La energía potencial será:

$$U_{\vec{Fe}} = \frac{KR^2}{2}(1 - \cos(\theta))^2 = \frac{mgR}{2}(1 - \cos(\theta))^2$$

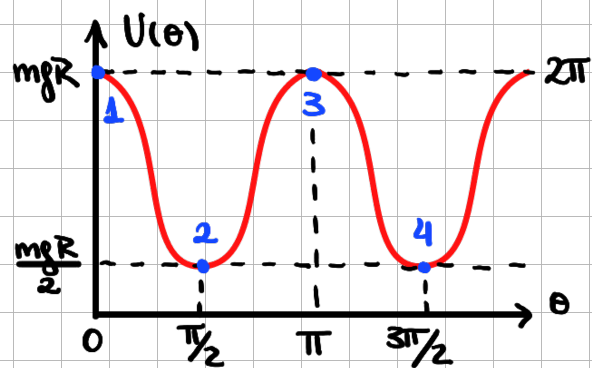
El potencial total será:

$$U_T = U_p + U_{Fe} = mgR\cos(\theta) + \frac{mgR}{2}(1 - \cos(\theta))^2$$

$$= mgR\left[\cancel{\cos(\theta)} + \frac{1}{2} - \cancel{\cos(\theta)} + \frac{1}{2}\cos^2(\theta)\right) = \boxed{\frac{mgR}{2}(1 + \cos^2(\theta))}$$



b) Teniendo el potencial gráficamente, podemos ver directamente los puntos de equilibrio. (La derivada es 0)

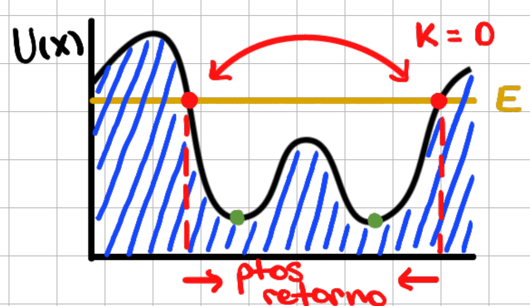


($\sum F = 0 \Leftrightarrow \nabla U = 0$ (en 1 variable) $\Leftrightarrow U' = 0$)

(Estables $\Leftrightarrow U'' > 0$, Inestables $\Leftrightarrow U'' < 0$)

1, 2, 3 y 4, y por la figura, 1 y 3 son inestables y 2 y 4 son estables.

c) Primero veamos en qué puntos se retorna dada una curva de potencial



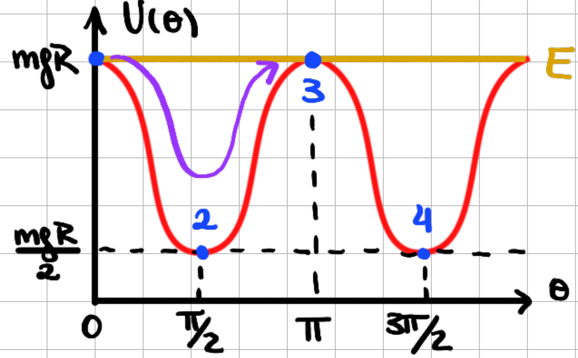
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x)$$

Para ptos de equilibrio se impone $K = 0$

Para nuestro caso calculamos E, que como será constante, valdrá lo mismo que en $t=0$, y como parte del reposo:

$$E = E(t=0) = \frac{1}{2} m R^2 \cancelto{0}{\dot{\theta}^2} + \frac{mgR}{2}\left(1 + \cancelto{1}{\cos^2}(0)\right) = mgR$$

Vemos esto en la curva de potencial.



Imponemos $K = \frac{1}{2}mv^2 = 0 \rightarrow v = R\dot{\theta} = 0$

$$\boxed{\text{Aquí notamos que se detiene en } \theta = \pi}$$

El trabajo que hace el resorte será:

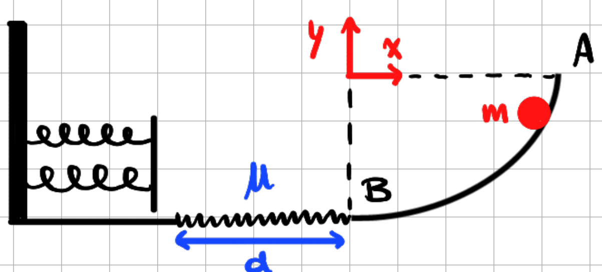
$$W = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \nabla U \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \overset{\text{en 1D}}{\frac{dU}{d\vec{r}}} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B$$

Usar $F = -\nabla U$ sólo se puede usar si es conservativa. Esta propiedad se cumple para CUALQUIER fuerza conservativa.

$$W_{Fe} = U_e(\theta = 0) - U_e(\theta = \pi) = \frac{mgR}{2}(1 - \overset{1}{\cancel{\cos}(0)})^2 - \frac{mgR}{2}(1 - \overset{-1}{\cancel{\cos}(\pi)})^2$$

$$\boxed{W_{Fe} = -2mgR}$$

P//



Como la partícula parte y termina en reposo, tenemos que

$$W_{TOT} = \sum_i W_i = K_f - K_i$$

$$\int_C \vec{P} \cdot d\vec{r} + \int \underset{0}{\cancel{\vec{N} \cdot d\vec{r}}} + \int_C \vec{F}_e + \int_C \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = 0$$

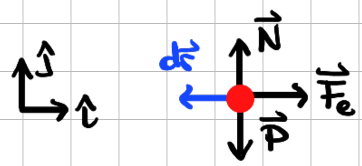
El trabajo de la normal es 0 pues es siempre perpendicular. Como el peso y la fuerza ejercida por los resortes provienen de un potencial, su trabajo se puede escribir como:

$$W_P = -\Delta U_{peso} \quad \wedge \quad W_{Fe} = -\Delta U_{Fe}$$

- $-\Delta U_{peso} = -mg(0 - y) = mgy$
- $-\Delta U_{Fe} = -K(\delta^2 - 0) = -K\delta^2$

El potencial de un resorte es $\frac{1}{2}K\Delta x^2$, pero como hay 2 resortes se cancela

Ahora se calcula el trabajo de la fuerza de roce, teniendo en cuenta el DCL de la masa.



De aquí obtenemos $N = mg$ y que $d\vec{r} = -dx\,\hat{\imath}$
Por fórmula sabemos $F_e = \mu N \hat{\imath}$

- $\displaystyle\int_0^d \mu m g\, \hat{\imath} \cdot -dx\,\hat{\imath} = -\mu m g d$

Antes de reemplazar, determinamos el valor de y. Cuando la masa llega al "suelo", $x = 0$, y así:

$$\left(\frac{0-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow y = b$$

Retomando:

$$mgb - K\delta^2 - \mu m g d = 0 \rightarrow \mu = \frac{b}{d} - \frac{K\delta^2}{mgd}$$