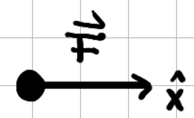
Auxiliar 2

17/03

P1//



Por segunda Ley de Newton se tendrá:

$$m\vec{a} = \sum F_i \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = e^{-nt}\sin(wt)\hat{\imath}$$

Al ser movimiento unidimensional, la aceleración será $\ddot{x}$. Así:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}e^{-nt}\sin(wt) \qquad \text{Variable Separable.}$$

Como se vió en el aux 1, para encontrar $x(t)$ se debe resolver la Edo para $\dot{x}$ y x, sólo que ahora n puede ser cualquiera.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$$

Integrando respecto al tiempo, entre 0 y t

$$\int_0^t \frac{d\dot{x}}{dt}\overset{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}\int_0^t e^{-nt}\sin(wt)dt$$

Al "cancelar" diferenciales (No apto para DIM) lo que se hace es un cambio de variable, por lo que los integrandos toman los valores de $\dot{x}(t)$ en dichos tiempos.

$$\int_{V_0}^{\dot{x}(t)} d\dot{x} = \frac{1}{m}\int_0^t e^{-nt}\sin(wt)dt$$

Se integra por partes:

$$\begin{matrix} u = \sin(wt) \\ dv = e^{-nt}dt \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} du = w\cos(wt)dt \\ V = -\frac{1}{n}e^{-nt} \end{matrix}$$

$$\int e^{-nt}\sin(wt)dt = -\frac{1}{n}e^{-nt}\sin(wt) + \frac{w}{n}\int e^{-nt}\cos(wt)\,dt$$

Con la misma lógica: $\begin{matrix} u = \cos(wt) \\ dv = e^{-nt}dt \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} du = -w\sin(wt)dt \\ V = -\frac{1}{n}e^{-nt} \end{matrix}$

$$\int e^{-nt}\sin(wt)dt = -\frac{1}{n}e^{-nt}\sin(wt) + \frac{w}{n}\left(-\frac{1}{n}e^{-nt}\cos(wt) - \frac{w}{n}\int e^{-nt}\sin(wt)dt\right)$$

$$\left(1+\frac{w^2}{n^2}\right)\int e^{-nt}\sin(wt)\,dt = -\frac{1}{n}e^{-nt}\sin(wt) - \frac{w}{n^2}e^{-nt}\cos(wt)$$

$$\therefore \int e^{-nt}\sin(wt)\,dt = \frac{-ne^{-nt}\sin(wt) - we^{-nt}\cos(wt)}{n^2+w^2}$$

Evaluando entre 0 y t:

$$\int_0^t e^{-nt}\sin(wt)\,dt = \overbrace{\frac{-ne^{-nt}\sin(wt) - we^{-nt}\cos(wt)}{n^2+w^2}}^{\text{Evaluado en } t} + \overbrace{\frac{w}{n^2+w^2}}^{\text{Evaluado en } 0}$$

Así se tiene $\dot{x}(t)$:

$$\boxed{\dot{x}(t) = V_0 + \left(\frac{w - e^{-nt}(n\sin(wt) + w\cos(wt))}{m(n^2+w^2)}\right)}$$

Para $x(t)$ se procede con la misma lógica

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t V_0\,dt + \frac{1}{m(n^2+w^2)}\left[\int_0^t w\,dt - n\underbrace{\int_0^t e^{-nt}\sin(wt)\,dt}_{\text{ya calculada}} - w\underbrace{\int_0^t e^{-nt}\cos(wt)}_{*}\right]$$

* Haciendo un procedimiento análogo a la primitiva de $e^{-nt}\sin(wt)$, se llega a:

$$\int_0^t e^{-nt}\cos(wt) = \frac{-ne^{-nt}\cos(wt) - we^{-nt}\sin(wt)}{n^2+w^2} + \frac{n}{n^2+w^2}$$

Se tendrá:

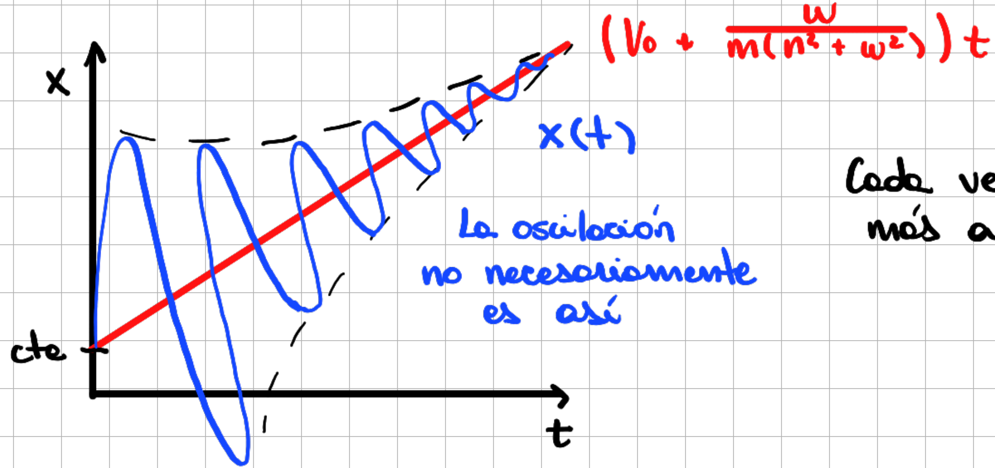
$$x(t) - x(0) = V_0 t + \frac{1}{m(n^2+w^2)}\Bigg[wt - n\left(\frac{-ne^{-nt}\sin(wt) - we^{-nt}\cos(wt)}{n^2+w^2} + \frac{w}{n^2+w^2}\right) - w\left(\frac{-ne^{-nt}\cos(wt) - we^{-nt}\sin(wt)}{n^2+w^2} + \frac{n}{n^2+w^2}\right)\Bigg]$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{m(n^2+w^2)}\left[wt + \frac{1}{(n^2+w^2)}\left(n^2 e^{-nt}\sin(wt) \ldots + nwe^{-nt}\cos(wt) - nw + nwe^{-nt}\cos(wt) + w^2\sin(wt) - nw\right]}$$

Faltó reordenar :)

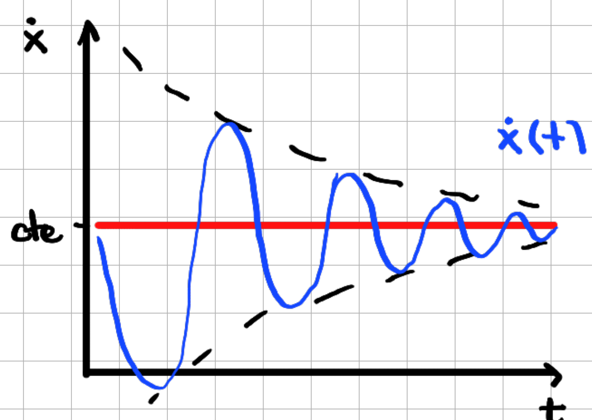
Me faltó un término

Queda un corcho muy feo, pero como verán son constantes (coef. de posición), $V_0 t$ (recta pendiente V_0) y todos los senos y cosenos van multiplicados por e^{-nt}, que decrece con el tiempo. Se puede deducir que oscila respecto a la recta con pendiente V_0, y que su amplitud será cada vez menor.



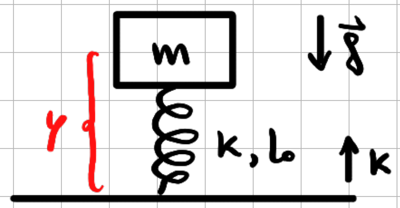
Cada vez se parecerá más a la recta

En cuanto a la velocidad, se tiene una cte y los senos y cosenos multiplicados por e^{-nt}. La diferencia con la posición es que ahora $\dot{x}$ tiende a una cte y no a una recta.



Nuevamente, la oscilación no necesariamente es así.

P2//



Existe roce viscoso $\vec{F}_{vis} = -c\vec{v}$. Por segunda ley de Newton:

$$m\vec{a} = -m\vec{g} - c\vec{v} - k(y - l_0)\hat{k}$$

Como el movimiento es sólo en $\hat{k}$, la posición, velocidad y aceleración serán respectivamente $y, \dot{y}, \ddot{y}$. La eq. de movimiento será:

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}l_0 - g}$$

Definiendo $\gamma = c/2m$, $w = \sqrt{k/m}$ y $f_0 = \frac{k}{m}l_0 - g$

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + w^2 y = f_0$$ → EDO no homogénea, pues $\neq 0$

$\boxed{\text{Aquí notamos que el equilibrio } (\ddot{y} = \dot{y} = 0) \text{ está en } y_{eq} = f_0/w^2.}$

Hacemos el cambio $u(t) = y(t) - y_{eq} \Rightarrow \dot{u} = \dot{y} \wedge \ddot{u} = \ddot{y}$. Así se tiene:

$$\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + w^2 u = 0$$

Suponemos $u(t) = e^{\beta t}$ → buscaremos β. De esta forma:

$$\beta^2 \cancel{e^{\beta t}} + 2\beta\gamma \cancel{e^{\beta t}} + w^2 \cancel{e^{\beta t}} = 0$$

$$\beta^2 + 2\beta\gamma + w^2 = 0$$ cuadrática simple

$$\beta_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w^2} \quad \wedge \quad \beta_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - w^2}$$

Así se tienen 2 respuestas a la EDO, cuya combinación lineal también será solución

$$u(t) = Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w^2})t} + Be^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - w^2})t}$$

Como $u(t) = y(t) - y_{eq}$

$$\boxed{y(t) = \frac{f_0}{w^2} + Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w^2})t} + Be^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - w^2})t}}$$

Al término $\sqrt{w^2 - \gamma^2}$ se le suele denominar Ω para simplificar. Esta cantidad es de suma reelevancia para cuando se habla de resonancia.

¿Qué pasa si $w^2 > \gamma^2$? $\gamma^2 - w^2 < 0 \Rightarrow$ exponente imaginario

$$y(t) = \frac{f_0}{w^2} + Ae^{-(\gamma - i\sqrt{w^2-\gamma^2})t} + Be^{-(\gamma + i\sqrt{w^2-\gamma^2})t}$$

Para determinar A y B, se imponen que las condiciones iniciales del problema son:

$$y(t=t_0) = y_0 \quad \wedge \quad \dot{y}(t=t_0) = \dot{y}_0$$

Evaluamos $t = t_0$ en $y(t)$

$$y_0 = \frac{f_0}{w^2} + Ae^{-(\gamma - i\Omega)t_0} + Be^{-(\gamma + i\Omega)t_0}$$

Obtenemos $\dot{y}(t)$ y evaluamos en $t = t_0$

$$\dot{y}(t) = -(\gamma - i\Omega)Ae^{-(\gamma - i\Omega)t} - (\gamma + i\Omega)Be^{-(\gamma + i\Omega)t}$$

$$\therefore \dot{y}_0 = -(\gamma - i\Omega)Ae^{-(\gamma - i\Omega)t} - (\gamma + i\Omega)Be^{-(\gamma + i\Omega)t}$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones para 2 constantes A y B, que al resolver se obtiene:

$$A = \frac{1}{2i\Omega}\left(\dot{y}_0 + (\gamma + i\Omega)\left(y_0 - \frac{f_0}{w^2}\right)\right)e^{(\gamma - i\Omega)t_0}$$

$$B = -\frac{1}{2i\Omega}\left(\dot{y}_0 + (\gamma - i\Omega)\left(y_0 - \frac{f_0}{w^2}\right)\right)e^{(\gamma + i\Omega)t_0}$$

Reemplazando:

$$y(t) = \frac{f_0}{w^2} + \frac{1}{2i\Omega}\left(\dot{y}_0 + (\gamma + i\Omega)\left(y_0 - \frac{f_0}{w^2}\right)\right)e^{(\gamma - i\Omega)t_0} \cdot e^{-(\gamma - i\Omega)t}$$
$$- \frac{1}{2i\Omega}\left(\dot{y}_0 + (\gamma - i\Omega)\left(y_0 - \frac{f_0}{w^2}\right)\right)e^{(\gamma + i\Omega)t_0} \cdot e^{-(\gamma + i\Omega)t}$$

Reordenando:

$i\Omega t_0 \quad - i\Omega t$

$$y(t) = \frac{f_0}{w^2} + \frac{1}{2i\Omega}\left(\dot{y}_0 + (\mu + i\Omega)(y_0 - \frac{f_0}{w^2})\right) e^{-\mu(t-t_0)} e^{i\Omega(t-t_0)}$$
$$- \frac{1}{2i\Omega}\left(\dot{y}_0 + (\mu - i\Omega)(y_0 - \frac{f_0}{w^2})\right) e^{-\mu(t-t_0)} e^{-i\Omega(t-t_0)}$$

$$y(t) = \frac{f_0}{w^2} + \frac{e^{-\mu(t-t_0)}}{\Omega}\Bigg[\left(\dot{y}_0 + \mu(y_0 - \frac{f}{w^2})\right)\underbrace{\left(\frac{e^{i\Omega(t-t_0)} - e^{-i\Omega(t-t_0)}}{2i}\right)}_{\sin(\Omega(t-t_0))}$$
$$+ \Omega(y_0 - \frac{f}{w^2})\underbrace{\left(\frac{e^{i\Omega(t-t_0)} + e^{-i\Omega(t-t_0)}}{2}\right)}_{\cos(\Omega(t-t_0))}\Bigg]$$

* Senos y cosenos resultan de la identidad de Euler

(1) $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
(2) $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

$(1)+(2)\rfloor \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$

$(1)-(2)\rfloor \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$

Reordenando ...

Finalmente y(t) será:

$$y(t) = \frac{f_0}{w^2} + e^{-\mu(t-t_0)}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\dot{y}_0 + \mu(y_0 - \frac{f}{w^2})\right)\sin(\Omega(t-t_0))\right.$$
$$\left. + (y_0 - \frac{f}{w^2})\cos(\Omega(t-t_0))\right]$$

Este el caso sub-amortiguado, donde la masa oscila en torno a $\frac{f_0}{w^2}$ con amplitud decreciente.

Aplicar C.I y luego SiS. EQ.

Ahora con la misma lógica se procede para el caso $w^2 < \mu^2$. Queda propuesto encontrar y(t).

Sería bueno que lo hicieran.
Es buen ejercicio para soltar la mano.

Este es el caso sobre-amortiguado. Tener en cuenta las definiciones de sinh y cosh (seno y coseno hiperbólicos)

¿Qué pasa si $w \to \gamma$? De la respuesta anterior, se toma $\Omega \to 0$, teniendo en cuenta que si $|x| << 1$, $\sin(x) \sim x \wedge \cos(x) \sim 1$

$$y(t) = \frac{f_0}{w^2} + e^{-\gamma(t-t_0)}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\dot{y}_0 + \gamma\left(y_0 - \frac{f}{w^2}\right)\right)\underline{(t-t_0)} + y_0 - \frac{f}{w^2}\right]$$

Aquí ya no hay oscilación, pero sí un término lineal dependiente del tiempo, por lo que la partícula tenderá a f_0/w^2 de forma más "suave" que el sub-amortiguado.

Este es el caso de amortiguamiento crítico.

Perdón si me pasé con la matraca :^

Cualquier duda que tengan me pueden escribir al correo o a mi WSP si es muy urgente.

Rorro