

FI2001-4 Mecánica.

Profesor: Marcel Clerc.

Auxiliares: Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.



Desarrollo Auxiliar 10: Leyes de Kepler.

26 de Abril del 2022

P1. Momento angular de un planeta:

Las tres leyes de Kepler son las siguientes:

- I) “*Los planetas tienen órbitas elípticas alrededor del Sol, y este se ubica en uno de los focos de la elipse*”.
- II) “*El vector posición de los planetas, medido con respecto al Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales*”.
- III) “*El cuadrado del período de los planetas es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita*”.

Entonces, nuestra misión es interpretar (física y matemáticamente) las primeras dos leyes y, a partir de esta interpretación, encontrar el hecho de que el momento angular de un planeta se conserva durante su órbita (tanto su magnitud como su dirección).

La más simple de analizar es la primera ley, que aunque es corta, dice bastante. Los planetas tienen órbitas elípticas, y una elipse es una curva **plana**, es decir, reside sólo en un plano, por lo tanto el movimiento de cada planeta reside siempre sólo en un plano durante su movimiento. Como esto es así, entonces el vector posición y velocidad residen en ese mismo plano siempre, por lo tanto si asumimos que ese plano es el plano XY , podemos escribir en coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad ; \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

La gracia de la primera ley de Kepler es que nos dice muy sutilmente que la dirección y sentido de estos vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ no cambiará, es decir, en ningún momento aparecerá mágicamente un $\hat{z}$ en alguna de estas dos cantidades, y en ningún momento el planeta va a orbitar mágicamente en sentido contrario. Entonces al hacer el producto cruz para calcular el momento angular, debemos fijarnos (por ahora) sólo en las consecuencias de que los vectores unitarios de estos dos vectores no cambien:

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{l} = m(r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \Rightarrow \vec{l} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$$

Notamos que el resultado ligado a la **dirección y sentido** de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ es que el momento angular tiene dirección $\hat{z}$ positiva, y como la dirección y sentido de la posición y la velocidad no cambiarán (porque el movimiento reside en un plano), entonces **la dirección y sentido del momento angular no cambia**, es decir, **se conserva**.

Ahora nos falta interpretar la segunda ley de Kepler, la cual nos debería entregar la información que falta, es decir, que la magnitud del momento angular se conserva. Escribiendo la velocidad como la derivada del vector posición con respecto al tiempo, y sea $l = ||\vec{l}||$, tendremos que:

$$l = m \left\| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

Para pasos pequeños (es decir, $d\vec{r}$) podemos decir que el área que forman $\vec{r}$ y $d\vec{r}$ es un triángulo, y sabemos¹ que el producto cruz entre dos vectores es dos veces el área del triángulo que forman estos vectores.

¹Para quienes no lo recuerdan, este video (y algunos anteriores de la serie) muestran la idea geoméricamente, y quizás quede un poco más clara: <https://www.youtube.com/watch?v=eu6i7WJeinw&t=16s>

Sea dS el área que forman $\vec{r}$ y $d\vec{r}$, entonces tendremos que:

$$l = m \left\| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = m \frac{d}{dt} \|\vec{r} \times d\vec{r}\| \Rightarrow l = 2m \frac{dS}{dt}$$

Ahora, según la segunda ley tenemos que “...barre áreas iguales en tiempos iguales”, entonces esto nos dice que la función $S(t)$, es decir, el área barrida por el vector posición en función del tiempo, debe ser una función con comportamiento lineal, ya que son el tipo de funciones que cumplen esa condición.

Como $S(t)$ es una función lineal, entonces su derivada es constante, por lo tanto si suponemos que $S(t) = At + B$, con A y B constantes, entonces:

$$\frac{dS}{dt} = A \Rightarrow l = 2mA$$

Es decir, **la magnitud del momento angular es constante**. Entonces, como demostramos que tanto la dirección como la magnitud del momento angular son cantidades conservadas, entonces concluimos que **el vector momento angular durante el movimiento planetario es una cantidad conservada**.

P2. Fuerza central constante:

- a) Se tiene un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 interactuando a través de una fuerza de tipo central con magnitud f_0 constante. Tal como se comentó en cátedra y en clase auxiliar anterior, si queremos demostrar que un sistema satisface la segunda ley de Kepler (es decir, que en la rotación plana descrita se barren áreas iguales en tiempos iguales) basta con demostrar que el momento angular $\vec{l}$ del sistema se conserva, ya que la conservación de la dirección y sentido de este vector nos dice que la rotación se mantiene en una curva plana, mientras que la conservación de la magnitud de este vector está asociada al hecho de que se barren áreas iguales en tiempos iguales.

Ahora, como en nuestro sistema de partículas sólo existe la fuerza de interacción f_0 , entonces el momento lineal (y por lo tanto la velocidad) del centro de masa se conserva, y en ese caso conviene usar un sistema de referencia co-móvil con las dos partículas y con origen en el centro de masa. Este sistema de referencia es útil ya que en este tipo de sistemas de partículas (no hay fuerzas externas) la dinámica general es la de rotación alrededor del centro de masa², por lo tanto en este sistema co-móvil y con el origen seleccionado las partículas estarán describiendo una rotación alrededor del origen con la misma velocidad angular, a la cual llamaremos $\dot{\theta}$, como se muestra en la siguiente figura:



Figura 1: Sistema de dos partículas visto lateralmente y desde arriba, respectivamente.

Ahora, como tenemos una fuerza del tipo central, entonces esta fuerza actúa en la dirección que une a ambas partículas, que en el caso de la figura anterior corresponde a la dirección asociada al vector $\vec{r}$. Este vector se relaciona con los vectores posición a través de la expresión $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, y entonces la dirección que une a las partículas se puede definir como:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Tal como se habló en cátedra y en clase auxiliar, la coordenada que nos permite abordar de la forma más conveniente posible los problemas de fuerzas centrales es el vector $\vec{r}$ mostrado en la figura, por lo tanto nos conviene escribir $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en función de este vector. Para ello recordemos que por la definición de centro de masa se tiene lo siguiente:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

En el sistema de referencia escogido el centro de masa es el origen, por lo tanto $\vec{R}_{\text{cm}} = \vec{0}$, y así:

$$\Rightarrow m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}$$

²Recordar este video visto en cátedra: <https://www.youtube.com/watch?v=DY3LYQv22qY>.

Aplicando esta relación en conjunto con $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ podemos decir que:

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{r}_1 \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r} + m_2 \vec{r}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (1)$$

Ahora que tenemos hecho el cambio de variable podemos aplicarlo en calcular el momento angular del sistema y así poder estudiar su conservación. Por principio de superposición el momento angular de un sistema de partículas corresponde a la suma de los momentos angulares individuales, entonces en este caso:

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 \Rightarrow \vec{\ell} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

Para obtener $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ podemos derivar con respecto al tiempo las expresiones encontradas en (1), entonces:

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}$$

Reemplazando y calculando:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\ell} &= m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \\ \Rightarrow \vec{\ell} &= \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \Rightarrow \vec{\ell} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \Rightarrow \vec{\ell} = \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \end{aligned}$$

En el último paso se usó la definición de *masa reducida* $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, y con este resultado podemos inferir que el sistema de partículas interactuando por una fuerza central es equivalente a una sola partícula de masa μ interactuando con un centro de fuerzas, el cual está a una distancia $\vec{r}$. Ahora, como queremos estudiar la conservación de este vector a lo largo del tiempo, lo que nos conviene es estudiar su derivada temporal, la cual puede calcularse haciendo uso de la propiedad de la derivada de un producto. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] = \mu \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \left(\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \mu [\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}] \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \mu (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \end{aligned} \quad (2)$$

Podemos notar que el cambio del momento angular en el tiempo es proporcional a la segunda derivada temporal de $\vec{r}$, entonces puede ser conveniente estudiar cómo el vector aceleración $\ddot{\vec{r}}$ se relaciona con el vector posición $\vec{r}$, para lo cual necesitamos estudiar la ecuación de movimiento del sistema.

Dado que la fuerza asociada a este problema es del tipo central, siempre va en la dirección $\hat{r}$, y como es una fuerza de atracción, siempre apunta desde la partícula de estudio hacia la otra partícula. Tomando en cuenta eso, y tomando en cuenta el sistema de referencia de la Figura 1, la ecuación de movimiento para cada partícula es:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = f_0 \hat{r} \quad ; \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -f_0 \hat{r} \quad (3)$$

Recordando las expresiones (1) podemos encontrar las aceleraciones $\ddot{\vec{r}}_1$ y $\ddot{\vec{r}}_2$, entonces:

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} \quad ; \quad \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}$$

Entonces, al reemplazar cualquiera de estas aceleraciones en la correspondiente ecuación de movimiento mostrada en (3) obtendremos la siguiente expresión:

$$\Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} - f_0 \hat{r} \Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = -f_0 \hat{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{f_0}{\mu} \hat{r} \quad (4)$$

Entonces, al reemplazar en la expresión (2), y usando que $\vec{r} = r\hat{r}$, se tiene que:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \mu \left[(r\hat{r}) \times \left(-\frac{f_0}{\mu} \hat{r} \right) \right] \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = -\mu r \frac{f_0}{\mu} (\hat{r} \times \hat{r})$$

Finalmente, como el producto cruz entre vectores iguales es igual a cero, se tiene que:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{0}}$$

Entonces, como demostramos que se conserva el momento angular del sistema, demostramos que el sistema satisface la segunda ley de Kepler.

- b) Para una órbita circular tendremos una distancia radial $r = R$ constante. Tomando en cuenta eso, tendremos el vector posición $\vec{r} = R\hat{r}$ constante, y usando coordenadas polares en el plano, esto significa que la aceleración asociada a este vector será $\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}^2 \hat{r}$, con $\dot{\theta}$ la velocidad angular en esta órbita circular. Reemplazando esto en la ecuación de movimiento (4) se tiene que:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{f_0}{\mu} \hat{r} \Rightarrow -R\dot{\theta}^2 \hat{r} = -\frac{f_0}{\mu} \hat{r} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{f_0}{\mu R}$$

Como esta relación no es una contradicción, entonces podemos notar que si podemos tener una órbita circular, la cual tiene asociada la velocidad angular constante que acabamos de encontrar. Ahora, esta velocidad angular se relaciona directamente con el período T de la órbita en el caso de ser constante, entonces:

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{f_0}{\mu R} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{f_0} R}$$

En este caso podemos notar que el cuadrado del período de la órbita es proporcional al radio de la órbita en sí, que corresponde al análogo de la tercera ley de Kepler para este tipo de interacción central.