

FI2001-4 Mecánica.

Profesor: Marcel Clerc.

Auxiliares: Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.



Desarrollo Auxiliar 14: Resortes y oscilaciones.

31 de Mayo del 2022

P1. Resorte no lineal:

- a) Queremos la energía mecánica E del sistema, que corresponde a la suma entre la energía cinética K y la energía potencial U de las componentes del sistema mecánico. En este caso tenemos una partícula atada a un resorte de manera tal que el movimiento es unidimensional (particularmente, siempre es horizontal), por lo tanto la posición de la partícula puede escribirse como $\vec{r} = x\hat{x}$, donde $\hat{x}$ es el vector unitario asociado a la dirección horizontal.

En este caso la energía cinética viene del movimiento de la partícula en si. Por definición la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

En esta expresión m es la masa de la partícula, y $\vec{v}$ es el vector velocidad, que por definición es la derivada temporal del vector posición. Tomando en cuenta eso:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{x} \Rightarrow |\vec{v}|^2 = (\dot{x}\hat{x}) \cdot (\dot{x}\hat{x}) \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \dot{x}^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (1)$$

Por otro lado la energía potencial del sistema viene dada por la energía potencial elástica asociada al resorte¹. Al ser una fuerza del tipo conservativa, la fuerza elástica $\vec{F}$ y la energía potencial elástica U están relacionadas a través de la siguiente expresión:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (2)$$

En esta expresión ∇ es un operador vectorial que, al aplicarse sobre un escalar (en este caso U) nos entrega el *gradiente* de dicho escalar, y puede representarse en distintos sistemas de coordenadas². La interpretación física de este gradiente es que nos dice cómo cambia nuestra cantidad escalar al movernos en distintas direcciones, y en el caso de la energía potencial U , la expresión (2) nos dice que la fuerza que siente la partícula está asociada a variaciones de la energía potencial en las distintas direcciones de nuestro sistema de coordenadas. Como en este caso estamos usando coordenadas cartesianas, la expresión (2) se desarrolla como:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}$$

Ya que en este caso la fuerza es $\vec{F} = -kx\hat{x}$ (es decir, sólo en la dirección $\hat{x}$) entonces podemos ignorar los últimos dos términos del lado derecho, y usar derivadas totales para la dirección x , y así:

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{x} \Rightarrow -kx\hat{x} = -\frac{dU}{dx}\hat{x} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = kx \quad (3)$$

¹No consideramos energía potencial gravitatoria ya que la altura es constante, por lo tanto podemos definirla como altura cero y evitar ese término.

²<https://es.wikipedia.org/wiki/Nabla>

En este caso podemos integrar con respecto a x a ambos lados de la expresión (recordando agregar una constante de integración), entonces:

$$\Rightarrow \int \frac{dU}{dx} dx = \int kx dx \Rightarrow U + U_0 = \frac{1}{2} kx^2$$

En este caso la constante de integración U_0 se interpreta físicamente como que la energía potencial no tiene un cero rigurosamente definido³, entonces siempre podemos agregar una constante redefiniendo el lugar donde $U = 0$. Si en este caso indicamos que $U(x = 0) = 0$ entonces usamos $U_0 = 0$, y así:

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (4)$$

Entonces, como la energía mecánica es $E = K + U$, usando los resultados de las expresiones (1) y (4) se tiene que:

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2}$$

Ahora, queremos encontrar la solución $x(t)$ que nos entregue la trayectoria de la partícula en función del tiempo, para lo cual podemos usar el hecho de que la energía mecánica E es constante⁴. Tomando en cuenta eso podemos despejar $\dot{x}$ a partir de la expresión de la energía, entonces:

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = E - \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}$$

Por ahora el signo $\pm$ nos da pistas de un movimiento oscilatorio, ya que la velocidad $\dot{x}$ tiene un mismo valor para una posición x en un movimiento hacia la derecha (signo $+$) y hacia la izquierda (signo $-$). Por simplicidad usaremos el signo positivo para integrar y obtener $x(t)$, entonces:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}} \Rightarrow \boxed{t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}}}$$

En este punto el problema está resuelto en forma integral, basta con resolver la integral del lado derecho, e invertir el resultado para obtener $x(t)$. Para entender que con este procedimiento se obtiene el resultado que conocemos para la ley de Hooke, integramos el lado derecho usando un software⁵ cualquiera, y entonces:

$$\begin{aligned} t = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) - \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 \right) \right] &\Rightarrow \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) = \sqrt{\frac{k}{m}} t + \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 \right) \\ \Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 \right) \right)} \end{aligned}$$

Podemos ver que se obtiene un oscilador armónico, que corresponde a la solución del problema de la ley de Hooke.

³De todas formas, todos los resultados físicos importantes se asocian a *diferencias* de energía, por lo tanto agregar una constante arbitraria a U no cambia las interpretaciones físicas que podamos sacar.

⁴Esto sólo es posible en sistemas *conservativos*, es decir, sistemas donde sólo fuerzas conservativas realizan trabajo.

⁵<https://www.calculadora-de-integrales.com/>

- b) Para este caso la fuerza asociada al resorte cambia, por lo tanto la energía potencial del sistema cambia. Tomando en cuenta eso, podemos retomar la parte (a) a partir de la expresión (3), entonces:

$$\begin{aligned}\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{x} &\Rightarrow -(k - \alpha x^2)x\hat{x} = -\frac{dU}{dx}\hat{x} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = kx - \alpha x^3 \\ \Rightarrow \int \frac{dU}{dx}dx &= \int (kx - \alpha x^3)dx \Rightarrow U + U_0 = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\alpha x^4\end{aligned}$$

Por el mismo argumento de la parte (a) usamos $U_0 = 0$, entonces:

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\alpha x^4$$

Con esto, la energía mecánica $E = K + U$ es:

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\alpha x^4}$$

De forma análoga despejamos $\dot{x}$ para poder integrar, entonces:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4 \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 + \frac{\alpha}{2m}x^4}$$

Por simplicidad usaremos el signo positivo para integrar y obtener $x(t)$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 + \frac{\alpha}{2m}x^4} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 + \frac{\alpha}{2m}x^4}} \\ \Rightarrow \boxed{t} &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 + \frac{\alpha}{2m}x^4}}\end{aligned}$$

Con esto tenemos la solución en forma integral. Ahora, si queremos los puntos de equilibrio debemos imponer la condición $\vec{F} = \vec{0}$, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{F}(x_{\text{eq}}) = \vec{0} &\Rightarrow -(k - \alpha x_{\text{eq}}^2)x_{\text{eq}} = 0 \Rightarrow x_{\text{eq}} = 0 \quad ; \quad k - \alpha x_{\text{eq}}^2 \\ \Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = 0 \quad ; \quad x_{\text{eq}} = -\sqrt{\frac{k}{\alpha}} \quad ; \quad x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}}\end{aligned}$$

Ahora, para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio estudiamos el signo de la derivada de $F = -(k - \alpha x^2)x$ (o la segunda derivada de $-U$) con respecto a x evaluada en cada punto, ya que:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2U}{dx^2} > 0 &\Rightarrow \text{Equilibrio estable} \\ \frac{dF}{dx} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2U}{dx^2} < 0 &\Rightarrow \text{Equilibrio inestable}\end{aligned}$$

Desde el punto de vista del cálculo diferencial, esto nos dice que un punto de equilibrio es estable cuando coincide con un mínimo de la función $U(x)$ asociada a la energía potencial del sistema, mientras que un punto de equilibrio será inestable cuando este punto coincida con un máximo de la función $U(x)$.

Por otro lado la condición asociada a la fuerza puede entenderse de forma gráfica viendo la siguiente figura:

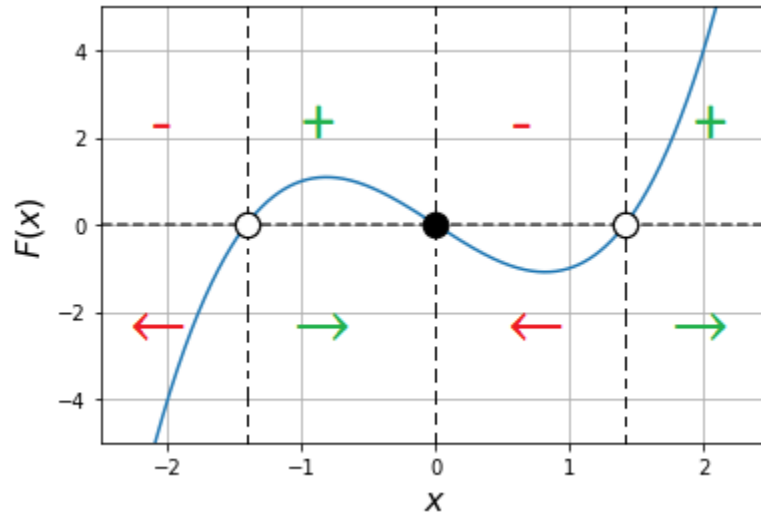


Figura 1: Fuerza $F(x) = -kx + \alpha x^3$ asociada al resorte, con $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $\alpha = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$.

En la figura anterior el punto negro representa el punto de equilibrio $x_{\text{eq}} = 0$, mientras que los puntos blancos representan los puntos de equilibrio $x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$. El gráfico está dividido en zonas donde la fuerza es positiva o negativa en la dirección $\hat{x}$, y como la fuerza es proporcional a la aceleración (por la segunda ley de Newton), entonces estas zonas pueden asociarse a zonas donde la aceleración es positiva o negativa, y entonces en estas zonas se favorecerá un movimiento hacia la derecha o izquierda, respectivamente (lo cual se representa con flechas en el gráfico de la Figura 1).

Ahora, si pensamos que inicialmente la partícula está en alguno de los puntos de equilibrio, este punto será del tipo *estable* si una pequeña perturbación tiene como consecuencia un movimiento que lo devuelve al punto de equilibrio. Viendo el gráfico, podemos notar que el punto que cumple esta característica es el punto de equilibrio $x_{\text{eq}} = 0$, ya que si perturbamos la partícula hacia la derecha entrará a una zona con aceleración negativa, la cual tenderá a frenar a la partícula y así devolverla al equilibrio (podemos notar que algo análogo pasa con una perturbación hacia la izquierda, cuya consecuencia es un movimiento restaurativo hacia la derecha).

Por otro lado, un punto de equilibrio será *inestable* si una pequeña perturbación fuera de este equilibrio tiene como consecuencia un movimiento que empuja la partícula hacia un punto de equilibrio estable, o hacia el infinito. Por ejemplo el punto de equilibrio $x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$ cumple esta condición, ya que una pequeña perturbación hacia la izquierda hace que la partícula adquiera una aceleración negativa, con lo cual se favorece un movimiento hacia la izquierda que la lleva hasta el punto de equilibrio estable $x_{\text{eq}} = 0$, mientras que una perturbación hacia la derecha la lleva a una zona con aceleración positiva, lo que favorece un movimiento indefinido hacia la derecha, escapando del punto de equilibrio. Algo análogo pasa con el caso $x_{\text{eq}} = -\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$.

En conclusión, se tiene que $x_{\text{eq}} = 0$ es un punto de equilibrio estable, mientras que los puntos $x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$ son equilibrios inestables.

Por último nos falta dibujar el diagrama de fase⁶ asociado a este sistema mecánico. Los puntos de equilibrio estables se representan con circunferencias alrededor de este punto en el eje horizontal, mientras que los puntos de equilibrio inestables se representan con hipérbolas que encierran al punto. Tomando en cuenta esto, para el caso de este problema el diagrama de fase nos queda de la siguiente forma:

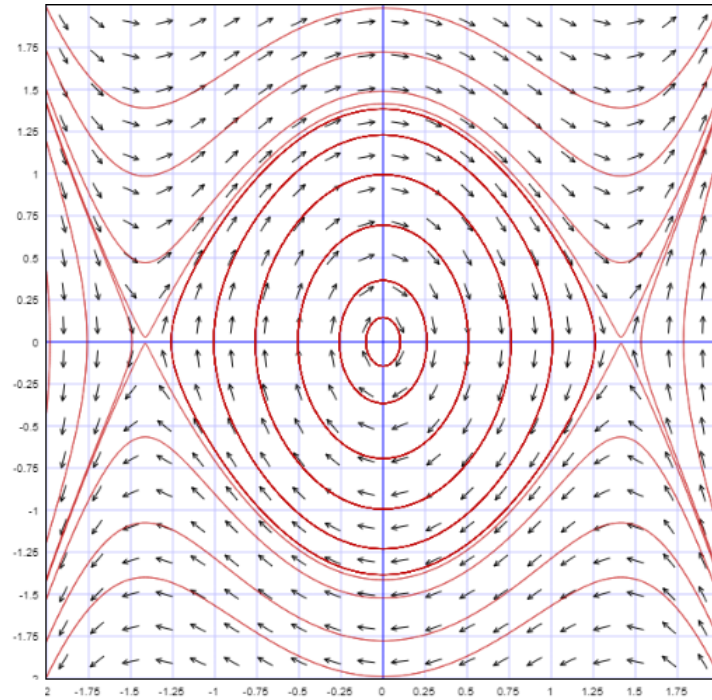


Figura 2: Diagrama de fase del sistema usando $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $\alpha = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$.

El sentido de las flechas se puede entender recordando que una velocidad positiva (zona del gráfico sobre el eje horizontal) indica un movimiento positivo (en este caso hacia la derecha), mientras que una velocidad negativa (zona del gráfico bajo el eje horizontal) indica un movimiento negativo (en este caso hacia la izquierda).

⁶Recordar que en este diagrama el eje vertical representa $\dot{x}$, mientras que el eje horizontal representa a x .