FI2001-4 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.

Desarrollo Auxiliar 4: Coordenadas esféricas y curvilíneas.

24 de Marzo del 2022

P1. Péndulo esférico:

a) Consideramos un péndulo de largo L y masa m cuyo movimiento no está restringido a un plano vertical (como el péndulo simple), sino que puede moverse libremente en el espacio con la única condición de que la cuerda se mantenga siempre tensa. Esta condición puede entenderse también como que la partícula puede moverse angularmente en cualquier dirección y sentido, siempre y cuando se mantenga a una distancia L constante con respecto al pivote. En este tipo de casos donde la partícula se mantiene a una distancia fija desde algún punto y puede moverse en cualquier dirección del espacio conviene abordarlos haciendo uso de las **coordenadas esféricas**.

Las coordenadas esféricas corresponden a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales que se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia r (distancia radial) y dos ángulos θ (polar) y ϕ (azimutal). La distancia radial r se mide directamente desde el origen hasta la partícula de interés, mientras que el ángulo polar θ se mide desde el eje vertical $\hat{z}$ hasta el radio que une el origen con la partícula, y el ángulo azimutal ϕ se mide desde el eje $\hat{x}$ hasta la proyección del radio recién mencionado. Todo se muestra en la siguiente figura:

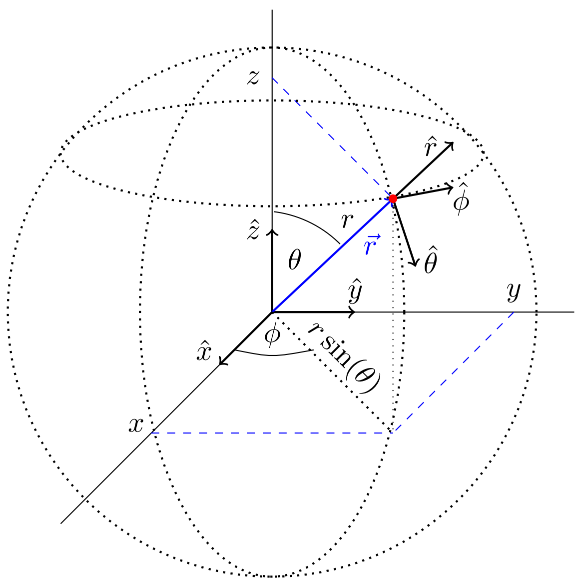


Figura 1: Representación gráfica del sistema de coordenadas esféricas.

Para estas coordenadas las cantidades cinemáticas están dadas por:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad ; \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi} \tag{1}$$

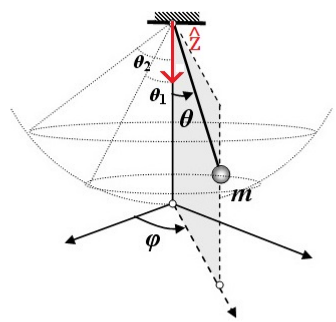
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)\right)\hat{\phi}$$

Ahora, el movimiento descrito por nuestro péndulo esférico es perfecto para ser descrito en coordenadas esféricas, ya que la partícula asociada a este péndulo se mueve siempre sobre la superficie de una esfera imaginaria de radio $r = L$ constante, de tal forma que si usamos como origen el pivote del péndulo, entonces la posición de esta partícula en coordenadas esféricas es $\vec{r} = L\hat{r}$. Esto es una ventaja ya que las derivadas temporales de la posición radial son nulas, es decir, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, con lo cual eliminamos una variable y a la vez se anulan varios términos en la velocidad y la aceleración, ya que en ese caso:

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\hat{\theta} + L\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi} \tag{2}$$

$$\vec{a} = L\left(-\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\right)\hat{r} + L\left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} + L\left(\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)\right)\hat{\phi} \tag{3}$$

Es importante entender que en nuestro problema el ángulo θ se está midiendo desde el "polo sur", a diferencia de las coordenadas esféricas, donde este ángulo se mide desde el "polo norte" (ver Figura 1). Para poder hacer coincidir nuestros ángulos usaremos un sistema de referencia tal que el vector $\hat{z}$ está apuntando hacia el piso de nuestro problema, tal como se muestra en el siguiente esquema:



Volviendo al problema particular que tenemos en esta pregunta, si modelamos el sistema del péndulo en coordenadas esféricas ya tenemos una expresión para la aceleración $\vec{a}$, entonces sólo nos falta encontrar las fuerzas que actúan en las distintas direcciones de la base esférica para poder escribir la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ y encontrar la ecuación de movimiento para las coordenadas angulares que describen la posición de la partícula.

Primero que todo existe una tensión $\vec{F}_T$, la cual siempre apunta en una dirección paralela a la cuerda que la produce, y siempre apunta en un sentido tal que sale desde la partícula hacia la cuerda. Tomando eso en consideración, como la cuerda une al origen con la partícula, entonces esta cuerda está siempre sobre la dirección radial $\hat{r}$ de las coordenadas esféricas, y como esta fuerza apunta desde la partícula hacia el origen, entonces el sentido de la tensión sobre esta dirección es negativo, es decir, $\vec{F}_T = -F_T\hat{r}$.

Por otro lado existe el peso $\vec{F}_g$ de la partícula, el cual se encarga de producir el movimiento oscilatorio. El peso es una fuerza que siempre apunta hacia el piso, de tal forma que en nuestro sistema de referencia $\vec{F}_g = mg\hat{z}$. Como estamos trabajando en coordenadas esféricas necesitamos que esta fuerza esté expresada en función de los vectores de la base esférica, por lo tanto debemos escribir $\hat{z}$ en función de $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$. Para hacer esto es útil recordar las expresiones para los vectores de la base esférica en función de los vectores de la base cartesiana:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos(\phi)\sin(\theta)\hat{x} + \sin(\phi)\sin(\theta)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos(\phi)\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\phi)\cos(\theta)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y} \end{aligned} \tag{4}$$

Podemos usar una combinación conveniente de los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ para encontrar $\hat{z}$:

$$\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta} = \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{y}$$
$$-\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{y} + \cos^2(\theta)\hat{z} + \sin^2(\theta)\hat{z}$$

$$\Rightarrow\ \hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta} \tag{5}$$

Entonces, con esto tenemos que el peso es $\vec{F}_g = mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta}$. Con esto la fuerza neta que actúa sobre la partícula de nuestro péndulo es:

$$\vec{F} = -F_T\hat{r} + mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} \tag{6}$$

Entonces, usando esta fuerza y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula mostrada en (3) en la 2da ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ se tiene que:

$$-F_T\hat{r} + mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} = mL\left(-\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\right)\hat{r}$$
$$+mL\left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} + mL\left(\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)\right)\hat{\phi}$$

Separamos en ecuaciones escalares, y entonces:

$$\boxed{\hat{r}}\ - F_T + mg\cos(\theta) = -mL\dot{\theta}^2 - mL\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)$$
$$\boxed{\hat{\theta}}\ - mg\sin(\theta) = mL\ddot{\theta} - mL\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\boxed{\hat{\phi}}\ 0 = mL\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2mL\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)$$

Estas ecuaciones modelan el movimiento del péndulo esférico a lo largo del tiempo. Podemos notar que la primera expresión sólo sirve para encontrar la tensión F_T en función de las cantidades cinemáticas de la partícula, mientras que las otras dos ecuaciones relacionan la aceleración de cada dirección angular con las velocidades $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ y la coordenada θ.

b) En los casos que para una coordenada q tengamos una ecuación de movimiento del estilo $\ddot{q} = \ddot{q}(q)$, entonces podemos usar la siguiente relación diferencial para encontrar la velocidad $\dot{q}$ en función de la coordenada q:

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq}\frac{dq}{dt}\ \Rightarrow\ \ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dq}\dot{q} \tag{7}$$

Escribir la aceleración de esta forma nos permite integrar a ambos lados para obtener una función $\dot{q}(q)$. En este caso queremos hacer algo parecido para la coordenada θ, sin embargo la ecuación de movimiento de esta coordenada depende de la velocidad angular azimutal $\dot{\phi}$. Podemos usar la ecuación de movimiento de ϕ para encontrar una relación entre $\dot{\phi}$ y las cantidades cinemáticas asociadas a la coordenada θ. Multipliquemos la tercera expresión por $\sin(\theta)$ y reordenemos, entonces:

$$mL\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2mL\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta) = 0\ \Rightarrow\ \ddot{\phi}\sin^2(\theta) + \dot{\phi}\left(2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\right) = 0$$

Podemos notar que el lado izquierdo es la derivada de un producto, entonces:

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\left[\dot{\phi}\sin^2(\theta)\right] = 0$$

Como esta derivada es nula, entonces la cantidad que estamos derivando se mantiene constante a lo largo del tiempo. Llamaremos a esta constante κ, y nos permite encontrar $\dot{\phi}^2$ en función de θ:

$$\kappa = \dot{\phi}\sin^2(\theta) \;\Rightarrow\; \dot{\phi} = \frac{\kappa}{\sin^2(\theta)} \;\Rightarrow\; \dot{\phi}^2 = \frac{\kappa^2}{\sin^4(\theta)} \tag{8}$$

Entonces, reemplazando este factor en la ecuación de movimiento de la dirección $\hat{\theta}$, y despejando $\ddot{\theta}$ se tiene que:

$$-mg\sin(\theta) = mL\ddot{\theta} - mL\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\kappa^2}{\sin^4(\theta)} \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = \frac{\kappa^2\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g}{L}\sin(\theta)$$

Aplicando la relación diferencial (7) podemos integrar, entonces:

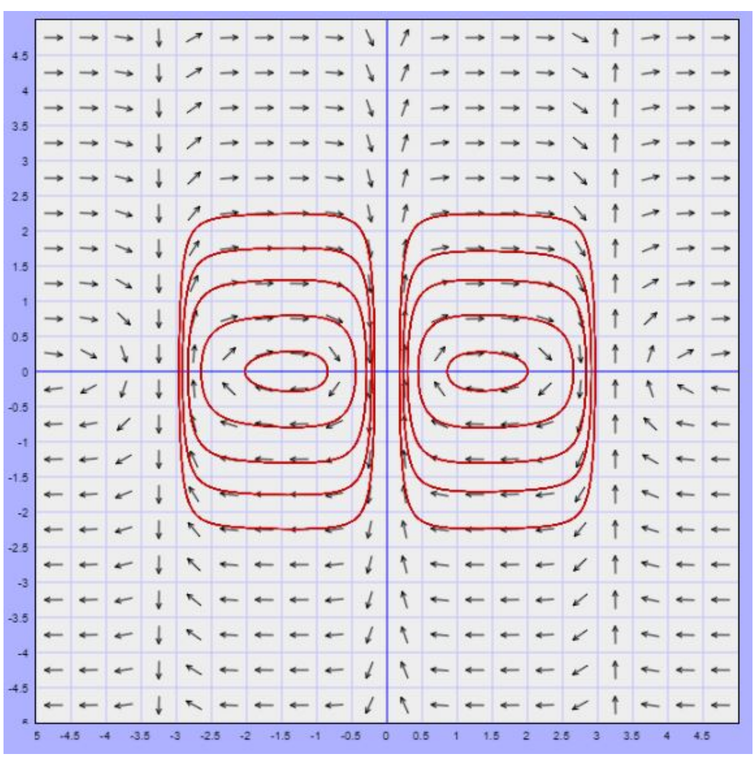
$$\Rightarrow\; \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{\kappa^2\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g}{L}\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \kappa^2\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}d\theta - \frac{g}{L}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 = \kappa^2\left[\frac{1}{2\sin^2(\theta_0)} - \frac{1}{2\sin^2(\theta)}\right] - \frac{g}{L}\left[\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right]$$

Como condición inicial se nos da $\dot{\theta}_0 = 0$, entonces:

$$\Rightarrow\; \dot{\theta}(\theta) = \pm\sqrt{\kappa^2\left[\frac{1}{\sin^2(\theta_0)} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\right] + \frac{2g}{L}\left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right]} \tag{9}$$

Se grafican estas curvas en el espacio de fase. En el siguiente gráfico el eje vertical es $\dot{\theta}$, el eje horizontal es θ, $\kappa = 0{,}4$ y $\frac{g}{L} = 0{,}4$:



Recordemos que $\theta \in [0, \pi]$, por lo tanto las soluciones se repiten periódicamente en el espacio de fase. Notamos que la dinámica del péndulo esférico corresponde a una oscilación del ángulo cenital θ en torno a algún valor de equilibrio, con una rotación libre para el ángulo azimutal ϕ. Es importante ver que el péndulo esférico jamás cruza por la posición vertical, ni por debajo ($\theta = 0$) ni por encima ($\theta = \pi$), lo que es una consecuencia del efecto centrífugo asociado a la velocidad angular $\dot{\phi}$.

Para finalizar, el vector velocidad puede obtenerse en función de θ si reemplazamos las expresiones (8) y (9) en el vector velocidad $\vec{v}$ mostrado en (2). Entonces:

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\hat{\theta} + L\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \pm L\sqrt{\kappa^2\left[\frac{1}{\sin^2(\theta_0)} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\right] + \frac{2g}{L}\left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right]}\hat{\theta} + \frac{L\kappa}{\sin(\theta)}\hat{\phi}}$$

En este caso los signos $+$ y $-$ hacen referencia a los casos donde el péndulo sube y baja, respectivamente, por lo tanto tiene sentido que esta ambigüedad esté en la dirección $\hat{\theta}$.

P2. Partícula cargada rotativa:

a) Queremos encontrar la ecuación de movimiento de la partícula en coordenadas esféricas, es decir, debemos desarrollar la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ escribiendo los vectores en función de la base esférica (es decir, usando los vectores unitarios $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$) y sus componentes en función de las coordenadas esféricas (es decir, en función de r, θ y ϕ). El uso de estas coordenadas no es algo arbitrario para este problema; dado que la partícula se mueve en una circunferencia de radio R que rota en torno a su eje vertical de simetría, entonces el movimiento de la partícula siempre es descrito en una superficie esférica de radio R en el espacio, por lo tanto es conveniente abordar el problema haciendo uso de las coordenadas esféricas.

De forma similar al ejercicio anterior, como el ángulo θ que estamos usando para describir la posición de la partícula se mide desde abajo (ver dibujo del enunciado), entonces nos conviene usar un sistema de referencia tal que el vector unitario $\hat{z}$ apunta hacia abajo en la dirección vertical, de tal forma que $\vec{g} = g\hat{z}$, $\vec{\Omega} = -\omega\hat{z}$, $\vec{B} = -B\hat{z}$ y θ puede considerarse el ángulo cenital de las coordenadas esféricas. Ahora, ya que la partícula se mueve a una distancia radial constante con respecto al centro del aro, entonces en coordenadas esféricas se tiene que $r = R$ para todo instante de tiempo, de tal forma que $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. Por otro lado ya que azimutalmente nos movemos con rapidez angular constante ω en sentido horario con respecto a $\hat{z}$, entonces $\dot{\phi} = -\omega$, y así $\ddot{\phi} = 0$. Reemplazando todo esto en la expresión mostrada en (1) para la aceleración $\vec{a}$ en coordenadas esféricas se tiene que:

$$\vec{a} = -R\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2(\theta)\right)\hat{r} + R\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} - 2R\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{\phi} \tag{10}$$

Ahora que tenemos la aceleración necesitamos la fuerza neta $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula cargada. Tenemos el peso $\vec{F}_g$ de la partícula, la fuerza de contacto $\vec{F}_c$, y la fuerza $\vec{F}_\ell$ inducida por el campo magnético. El peso siempre apunta hacia el suelo, y como en este caso el vector $\hat{z}$ apunta en ese sentido, se tiene que $\vec{F}_g = mg\hat{z}$. Como estamos usando coordenadas esféricas necesitamos expresar esta fuerza en función de los vectores de la base esférica, entonces usando que $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$ se tiene que $\vec{F}_g = mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta}$. Por otro lado la fuerza de contacto tiene la característica de ser perpendicular a la superficie de contacto, y como en este caso el aro está girando, tiene sentido pensar que existe una componente de la fuerza de contacto que apunta hacia el centro del aro, y otra que apunta en sentido contrario al movimiento azimutal[1], entonces la forma más general para la fuerza de contacto en este problema es $\vec{F}_c = -F_{cr}\hat{r} - F_{c\phi}\hat{\phi}$. Por último, para calcular la fuerza $\vec{F}_\ell$ necesitamos la velocidad del aro expresada en coordenadas esféricas, para lo cual reemplazamos los datos del problema en la expresión de la velocidad mostrada en (1), entonces:

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} - R\omega\sin(\theta)\hat{\phi}$$

Entonces, usando $\vec{B} = -B\hat{z} = -B\cos(\theta)\hat{r} + B\sin(\theta)\hat{\theta}$ y la definición de $\vec{F}_\ell$ se tiene que:

$$\vec{F}_\ell = q\left(R\dot{\theta}\hat{\theta} - R\omega\sin(\theta)\hat{\phi}\right) \times \left(-B\cos(\theta)\hat{r} + B\sin(\theta)\hat{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \ \vec{F}_\ell = qBR\omega\sin^2(\theta)\hat{r} + qBR\omega\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta} + qBR\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{\phi}$$

Entonces, con esto podemos encontrar la fuerza neta $\vec{F}$ que siente la partícula cargada en el aro:

$$\vec{F} = \left(mg\cos(\theta) + qBR\omega\sin^2(\theta) - F_{cr}\right)\hat{r} + \left(qBR\omega\sin(\theta)\cos(\theta) - mg\sin(\theta)\right)\hat{\theta} + \left(qBR\dot{\theta}\cos(\theta) - F_{c\phi}\right)\hat{\phi}$$

[1] Como el aro rota en una circunferencia horizontal debe existir una fuerza que lo mantenga en esa trayectoria, la cual corresponde en este caso al contacto con el aro en la dirección $\hat{\phi}$.

Ahora que tenemos la aceleración $\vec{a}$ mostrada en (10) y la fuerza neta $\vec{F}$ mostrada anteriormente podemos usar la 2da ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, entonces:

$$-mR\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)\right)\hat{r} + mR\left(\ddot{\theta} - \omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} - 2mR\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{\phi} =$$
$$\left(mg\cos(\theta) + qBR\omega\sin^2(\theta) - F_{cr}\right)\hat{r} + \left(qBR\omega\sin(\theta)\cos(\theta) - mg\sin(\theta)\right)\hat{\theta} + \left(qBR\dot{\theta}\cos(\theta) - F_{c\phi}\right)\hat{\phi}$$

Este resultado corresponde a la ecuación de movimiento para la partícula, por lo tanto ya se considera como correcto. Es conveniente de todas formas separar esto en ecuaciones escalares, es decir, igualar las componentes asociadas a un mismo vector unitario, entonces:

$$\boxed{\hat{r}} \quad -mR\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2(\theta)\right) = mg\cos(\theta) + qBR\omega\sin^2(\theta) - F_{cr}$$
$$\boxed{\hat{\theta}} \quad mR\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right) = qBR\omega\sin(\theta)\cos(\theta) - mg\sin(\theta)$$
$$\boxed{\hat{\phi}} \quad -2mR\omega\dot{\theta}\cos(\theta) = qBR\dot{\theta}\cos(\theta) - F_{c\phi}$$

b) Queremos encontrar las componentes F_{cr} y $F_{c\phi}$ de la fuerza de contacto entre la argolla y el aro en función del ángulo θ, y estas componentes están asociadas a las componentes radial y azimutal (primera y tercera ecuación, respectivamente) de la ecuación de movimiento. Estas ecuaciones no nos permiten despejar las fuerzas de contacto de forma directa ya que involucran a la velocidad angular $\dot{\theta}$, por lo tanto debemos encontrar una expresión para esta velocidad en función de los datos del problema, y luego reemplazamos en estas dos ecuaciones para despejar F_{cr} y $F_{c\phi}$ en función de θ solamente.

Ya que la primera y tercera ecuación del conjunto anterior involucran las incógnitas, la ecuación que nos entregará la información necesaria será la ecuación asociada a la dirección $\hat{\theta}$, es decir:

$$mR\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right) = qBR\omega\sin(\theta)\cos(\theta) - mg\sin(\theta)$$
$$\Rightarrow\ \ddot{\theta} = \left(\frac{qB\omega}{m} + \omega^2\right)\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{g}{R}\sin(\theta)$$

Acá podemos usar regla de la cadena para convertir $\ddot{\theta}$ en una expresión que involucre al ángulo θ y su derivada temporal $\dot{\theta}$, es decir:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\ \Rightarrow\ \ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Reemplazando en la expresión anterior y reordenando podemos integrar la ecuación diferencial anterior, entonces:

$$\Rightarrow\ \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \left(\frac{qB\omega}{m} + \omega^2\right)\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{g}{R}\sin(\theta)$$
$$\Rightarrow\ \int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(t)}\dot{\theta}d\dot{\theta} = \left(\frac{qB\omega}{m} + \omega^2\right)\int_{\theta(0)}^{\theta(t)}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta - \frac{g}{R}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)}\sin(\theta)d\theta$$

Como condición inicial usaremos que la argolla parte del reposo en un ángulo θ_0, es decir, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$, entonces:

$$\Rightarrow\ \int_{0}^{\dot{\theta}(t)}\dot{\theta}d\dot{\theta} = \left(\frac{qB\omega}{m} + \omega^2\right)\int_{\theta_0}^{\theta(t)}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta - \frac{g}{R}\int_{\theta_0}^{\theta(t)}\sin(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{qB\omega}{m}+\omega^2\right)\left(\cos(2\theta_0)-\cos(2\theta)\right) - \frac{g}{R}\left(\cos(\theta_0)-\cos(\theta)\right)$$
$$\Rightarrow\ \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{qB\omega}{m}+\omega^2\right)\left(\cos(2\theta_0)-\cos(2\theta)\right) - \frac{2g}{R}\left(\cos(\theta_0)-\cos(\theta)\right)$$
$$\Rightarrow\ \dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{qB\omega}{m}+\omega^2\right)\left(\cos(2\theta_0)-\cos(2\theta)\right) - \frac{2g}{R}\left(\cos(\theta_0)-\cos(\theta)\right)}$$

Entonces, usando esta expresión en las ecuaciones asociadas a las direcciones $\hat{r}$ y $\hat{\phi}$ podemos despejar F_{cr} y $F_{c\phi}$. Partiendo por F_{cr} se tiene que:

$$F_{cr} = mg\cos(\theta) + qBR\omega\sin^2(\theta) + mR\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2(\theta)\right)$$
$$\Rightarrow\ F_{cr}(\theta) = mg\cos(\theta) + \left(qBR\omega+\omega^2\right)\sin^2(\theta)$$
$$+mR\left[\frac{1}{2}\left(\frac{qB\omega}{m}+\omega^2\right)\left(\cos(2\theta_0)-\cos(2\theta)\right) - \frac{2g}{R}\left(\cos(\theta_0)-\cos(\theta)\right)\right]$$

Para $F_{c\phi}$ se tiene lo siguiente:

$$F_{c\phi} = 2mR\omega\dot{\theta}\cos(\theta) + qBR\dot{\theta}\cos(\theta)$$
$$\Rightarrow\ F_{c\phi} = \pm\left(2mR\omega+qBR\right)\cos(\theta)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{qB\omega}{m}+\omega^2\right)\left(\cos(2\theta_0)-\cos(2\theta)\right) - \frac{2g}{R}\left(\cos(\theta_0)-\cos(\theta)\right)}$$

El signo $\pm$ en la fuerza $F_{c\phi}$ hace referencia a que la fuerza de contacto en ese punto cambia de sentido para ciertos valores del ángulo θ.

P3. Coordenadas para problema de tres cuerpos:

Para desarrollar este ejercicio es conveniente entender cómo podemos crear sistemas de coordenadas curvilíneas en general[2]. Si partimos usando un sistema cartesiano, la posición de una partícula puede representarse a partir del vector $\vec{R}(x,y) = x\hat{x} + y\hat{y}$, donde x e y son variables que cuantifican la posición de la partícula en la dirección $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (de ahora en adelante horizontal y vertical, respectivamente). Ahora, en algunos casos con ciertas simetrías es conveniente usar otras variables para representar la posición de una partícula, por ejemplo en el caso del movimiento circular es más conveniente representar la posición a partir de una distancia radial ρ y un ángulo ϕ. Si la combinación de estas nuevas variables es tal que representan de forma única a cada punto del plano, entonces podemos crear un sistema de coordenadas a partir de ellas.

El procedimiento general aplicado a este ejercicio en particular es el siguiente. Tenemos las nuevas variables μ y ν, las cuales usaremos para inventar el sistema de coordenadas elípticas. En este caso estas nuevas coordenadas son tales que todos los puntos asociados a un valor de μ constante están sobre una elipse, mientras que los puntos asociados a un valor de ν constante están sobre una hipérbola. Tomando en cuenta estas características, las coordenadas cartesianas x e y pueden escribirse en función de las nuevas variables μ y ν de la siguiente forma:

$$x = a\cosh(\mu)\cos(\nu) \quad ; \quad y = a\sinh(\mu)\sin(\nu) \tag{11}$$

Para que μ y ν cumplan la condición de definir de manera única a cada punto del plano, se debe cumplir que $\mu \geq 0$ y $\nu \in [0, 2\pi)$. Ahora, por definición los vectores unitarios $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ están definidos por la dirección y sentido tangentes a la curva de valor μ y ν constante, respectivamente. Esto puede calcularse matemáticamente a través de la derivada del vector posición con respecto a cada coordenada, es decir:

$$\hat{\mu} = \left|\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \mu}\right|\right|^{-1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \mu} \quad ; \quad \hat{\nu} = \left|\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \nu}\right|\right|^{-1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \nu} \tag{12}$$

Partamos calculando la derivada de $\vec{R}$ con respecto a cada coordenada usando las expresiones mostradas en (11). Para μ se tiene que:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu}\hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \mu}\hat{y} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[a\cosh(\mu)\cos(\nu)\right]\hat{x} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[a\sinh(\mu)\sin(\nu)\right]\hat{y}$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \mu} = a\sinh(\mu)\cos(\nu)\hat{x} + a\cosh(\mu)\sin(\nu)\hat{y}$$

Ahora para ν:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \nu} = \frac{\partial x}{\partial \nu}\hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \nu}\hat{y} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left[a\cosh(\mu)\cos(\nu)\right]\hat{x} + \frac{\partial}{\partial \nu}\left[a\sinh(\mu)\sin(\nu)\right]\hat{y}$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \nu} = -a\cosh(\mu)\sin(\nu)\hat{x} + a\sinh(\mu)\cos(\nu)\hat{y}$$

[2] Para enfocarse en casos parecidos al ejercicio, sólo veremos casos en 2D.

Es posible ver que el módulo de estas derivadas es el mismo, entonces:

$$\Rightarrow \left\|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \mu}\right\| = \left\|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \nu}\right\| = \sqrt{(a\sinh(\mu)\cos(\nu))^2 + (a\cosh(\mu)\sin(\nu))^2}$$

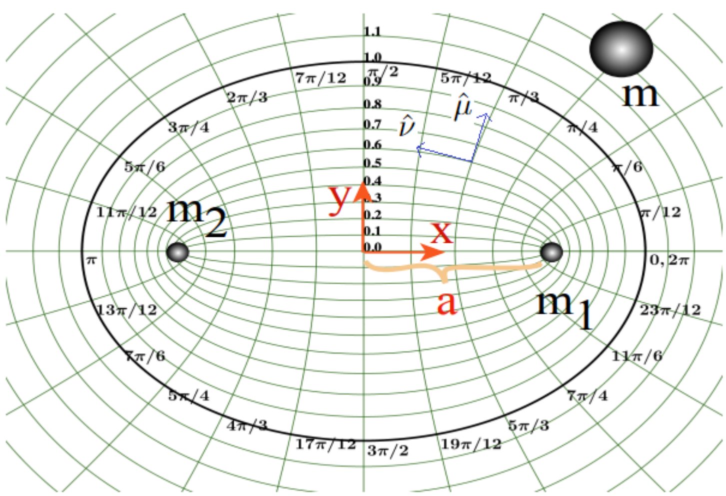
$$\Rightarrow \left\|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \mu}\right\| = \left\|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \nu}\right\| = a\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}$$

Usando las expresiones (12) y las derivadas encontradas anteriormente se tiene que:

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sinh(\mu)\cos(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{x} + \frac{\cosh(\mu)\sin(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{y} \tag{13}$$

$$\hat{\nu} = -\frac{\cosh(\mu)\sin(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{x} + \frac{\sinh(\mu)\cos(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{y} \tag{14}$$

Ahora, para representar gráficamente estos vectores tenemos dos opciones. La opción directa es recordar que por definición los vectores unitarios[3] $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ apuntan en una dirección tangencial a la curva asociada a un valor constante de la coordenada ν o μ, respectivamente, y que el sentido en el cual apunta cada uno de estos vectores es el sentido en el cual se recorre esta curva cuando aumentamos la coordenada que no es constante. Por ejemplo, como en el caso de μ constante tenemos elipses, entonces el vector $\hat{\nu}$ es tal que es tangente a una elipse, y como ν (la coordenada no constante) es un ángulo medido en sentido antihorario, entonces el vector $\hat{\nu}$ apunta en sentido antihorario. De forma análoga, cuando ν es constante se tienen hipérbolas, por lo tanto el vector $\hat{\mu}$ es tal que es tangente a una hipérbola, y como μ (la coordenada no constante) es una distancia que hace crecer a la hipérbola desde el eje $\hat{x}$ hacia arriba-derecha (en el primer cuadrante), entonces ese es el sentido del vector $\hat{\mu}$. Tomando eso en consideración, en el primer cuadrante los vectores $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ tendrían una orientación parecida a la siguiente:



La otra forma de obtener una dirección y sentido aproximadamente correctos es reemplazar valores de μ y ν que ilustren hacia dónde apuntan relativamente los vectores unitarios asociados. Por ejemplo si usamos $\mu = 2$ y $\nu = \frac{\pi}{3}$ obtendremos que $\hat{\mu}$ es un vector que apunta hacia la derecha y hacia arriba, mientras que

[3] Esto es válido para los vectores unitarios de cualquier base

$\hat{\nu}$ es un vector que apunta hacia la izquierda y hacia arriba. Tomando en cuenta ese comportamiento es posible dibujar y obtener algo parecido a lo que se mostró en la imagen anterior.

Por último necesitamos escribir el vector posición $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$ en función de las coordenadas μ y ν, y usando los vectores de la base $\{\hat{\mu}, \hat{\nu}\}$. Como ya tenemos x e y en función de las nuevas coordenadas, lo único que nos falta es encontrar $\hat{x}$ y $\hat{y}$ en función de los elementos de las coordenadas elípticas. Para eso sacaremos ventaja de las siguientes identidades de las funciones trigonométricas e hiperbólicas:

$$\cos^2(\nu) + \sin^2(\nu) = 1 \quad ; \quad \cosh^2(\nu) - \sinh^2(\nu) = 1 \tag{15}$$

También definiremos el factor siguiente factor:

$$\lambda = \sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}$$

Entonces, usando las expresiones obtenidas en (13) y (14) se tiene lo siguiente:

$$\begin{gathered}
\lambda\hat{\mu}\cosh(\mu)\sin(\nu) + \lambda\hat{\nu}\sinh(\mu)\cos(\nu) = \sinh(\mu)\cosh(\mu)\sin(\nu)\cos(\nu)\hat{x} \\
+ \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)\hat{y} - \sinh(\mu)\cosh(\mu)\sin(\nu)\cos(\nu)\hat{x} + \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)\hat{y} \\
\Rightarrow \; \lambda\hat{\mu}\cosh(\mu)\sin(\nu) + \lambda\hat{\nu}\sinh(\mu)\cos(\nu) = \left[\cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) + \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)\right]\hat{y} \\
\Rightarrow \; \lambda\hat{\mu}\cosh(\mu)\sin(\nu) + \lambda\hat{\nu}\sinh(\mu)\cos(\nu) = \lambda^2\hat{y} \; \Rightarrow \; \hat{y} = \frac{1}{\lambda}\cosh(\mu)\sin(\nu)\hat{\mu} + \frac{1}{\lambda}\sinh(\mu)\cos(\nu)\hat{\nu}
\end{gathered}$$

$$\Rightarrow \; \hat{y} = \frac{\cosh(\mu)\sin(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\mu} + \frac{\sinh(\mu)\cos(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\nu} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
\lambda\hat{\mu}\sinh(\mu)\cos(\nu) - \lambda\hat{\nu}\cosh(\mu)\sin(\nu) = \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)\hat{x} \\
+ \sinh(\mu)\cosh(\mu)\sin(\nu)\cos(\nu)\hat{y} + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)\hat{x} - \sinh(\mu)\cosh(\mu)\sin(\nu)\cos(\nu)\hat{y} \\
\Rightarrow \; \lambda\hat{\mu}\sinh(\mu)\cos(\nu) - \lambda\hat{\nu}\cosh(\mu)\sin(\nu) = \left[\cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) + \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)\right]\hat{x} \\
\Rightarrow \; \lambda\hat{\mu}\sinh(\mu)\cos(\nu) - \lambda\hat{\nu}\cosh(\mu)\sin(\nu) = \lambda^2\hat{x} \; \Rightarrow \; \hat{x} = \frac{1}{\lambda}\sinh(\mu)\cos(\nu)\hat{\mu} - \frac{1}{\lambda}\cosh(\mu)\sin(\nu)\hat{\nu}
\end{gathered}$$

$$\Rightarrow \; \hat{x} = \frac{\sinh(\mu)\cos(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\mu} - \frac{\cosh(\mu)\sin(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\nu} \tag{17}$$

Entonces, usando estos resultados junto con las coordenadas mostradas en (11) en la definición de vector posición $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$ tendremos el vector posición expresado en coordenadas elípticas:

$$\begin{gathered}
\vec{R}(\mu,\nu) = \frac{a\cosh(\mu)\sinh(\mu)\cos^2(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\mu} - \frac{a\cosh^2(\mu)\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\nu} \\
+ \frac{a\sinh(\mu)\cosh(\mu)\sin^2(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\mu} + \frac{a\sinh^2(\mu)\cos(\nu)\sin(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\nu}
\end{gathered}$$

Juntando términos en $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ y aplicando las identidades mostradas en (15) se tiene finalmente que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}(\mu,\nu) = \frac{a\cosh(\mu)\sinh(\mu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)+\cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\mu} - \frac{a\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sqrt{\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)+\cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)}}\hat{\nu}}$$