**FI2001-4** Mecánica.
**Profesor:** Marcel Clerc.
**Auxiliares:** Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.

# Auxiliar 7: Centro de masa.

14 de Abril del 2022

## P1. Filtro separador:

a) En un sistema de partículas, el centro de masa es una posición que corresponde al promedio de la posición de las partículas ponderada por la masa de cada una de estas. En ese sentido, si se tiene un sistema de $N$ partículas, donde la $i$-ésima partícula tiene masa $m_i$ y posición $\vec{r}_i$, entonces el centro de masa $\vec{R}_{\text{cm}}$ se define a través de la siguiente expresión:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} \Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i \tag{1}$$

En la última expresión $M$ corresponde a la masa total del sistema de partícula. Ahora, en el caso en que tengamos un sistema de partículas tales que su masa individual $dm$ es muy pequeña y su separación es muy diminuta, podemos calcular el centro de masa realizando la suma anterior mediante una integral, es decir:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\int_V \vec{r}dm}{\int_V dm}$$

En esta expresión $V$ corresponde al volumen ocupado físicamente por nuestro sistema continuo de partículas. Ahora, para realizar los cálculos en este caso es más sencillo modelar el sistema de partículas como un sistema que tiene una densidad de masa $\rho(\vec{r})$ tal que $dm = \rho(\vec{r})dV$, con $dV$ el volumen infinitesimal que usa la partícula en la posición $\vec{r}$. Tomando en cuenta eso, la definición del centro de masa para un sistema continuo de partículas puede escribirse como:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV}{\int_V \rho(\vec{r})dV} \Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV \tag{2}$$

Para el caso de sistemas de partículas con una densidad superficial $\sigma(\vec{r})$ o lineal $\lambda(\vec{r})$ la integral anterior se calcula con un diferencial de superficie o línea, respectivamente, es decir, en esos casos el centro de masa queda definido como:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_S \vec{r}\sigma(\vec{r})dS \quad ; \quad \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_C \vec{r}\lambda(\vec{r})d\ell \tag{3}$$

En el caso particular de este ejercicio nos entregan una densidad volumétrica de masa, por lo tanto tendremos que ocupar la definición (2) del centro de masa. En este caso la densidad de masa es:

$$\rho(z) = \rho_0\left(1 - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right)$$

En esta expresión $z$ es la altura medida desde el fondo del recipiente, y esta densidad de masa es válida para cualquier altura de mezcla que tengamos dentro del cilindro. Ahora, como la altura $z$ cambia en función del tiempo el procedimiento correcto consiste en calcular el centro de masa para una altura arbitraria $z$ usando la densidad anterior, y luego de tener el resultado reemplazamos la expresión para $z(t)$ que nos entregan en el enunciado y que depende explícitamente del tiempo.

Para calcular el centro de masa usando la definición (2) debemos decidir el sistema de coordenadas a utilizar para parametrizar los elementos de la integral. Como en este caso el problema tiene simetría axial[1] nos conviene usar coordenadas cilíndricas, y por lo tanto el diferencial de volumen que usaremos será $dV = rdrd\phi dk$, donde $r$, $\phi$ y $k$ son la coordenada radial, azimutal y altura[2] de las coordenadas cilíndricas, y para que el volumen sobre el cual integremos coincida con los límites físicos del sistema de este ejercicio, entonces $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y $k \in [0, z]$, donde $z$ es la altura que luego reemplazaremos por su expresión en función del tiempo. Por otro lado conviene anotar el vector $\vec{r}$ que aparece en la definición de centro de masa en la base de vectores cartesianos, pero manteniendo las componentes de este vector en las coordenadas que usamos para parametrizar nuestro sistema (en este caso cilíndricas), de esta forma podemos separar la integral en componentes cartesianas[3]. Por ejemplo en este caso $\vec{r} = r\cos(\phi)\hat{x} + r\sin(\phi)\hat{y} + k\hat{z}$, lo cual nos permite separar la integral de la siguiente forma:

$$\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \int_V (r\cos(\phi)\hat{x} + r\sin(\phi)\hat{y} + k\hat{z})\,\rho(\vec{r})dV$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \int_V r\cos(\phi)\hat{x}\rho(\vec{r})dV + \int_V r\sin(\phi)\hat{y}\rho(\vec{r})dV + \int_V k\hat{z}\rho(\vec{r})dV$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \hat{x}\int_V r\cos(\phi)\rho(\vec{r})dV + \hat{y}\int_V r\sin(\phi)\rho(\vec{r})dV + \hat{z}\int_V k\rho(\vec{r})dV$$

Usar el vector $\vec{r}$ de esta forma facilita el cálculo al separar la integral del centro de masa, que involucra un vector, en tres integrales escalares, las cuales serán las componentes del centro de masa para cada eje. Entonces calculemos estas integrales reemplazando[2] $\rho(k)$ y el diferencial $dV$ mostrado anteriormente, así:

$$\int_V r\cos(\phi)\rho(\vec{r})dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^z r\cos(\phi)\rho_0\left(1-\left(\frac{k}{H}\right)^2\right)rdrd\phi dk$$

$$\int_V r\sin(\phi)\rho(\vec{r})dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^z r\sin(\phi)\rho_0\left(1-\left(\frac{k}{H}\right)^2\right)rdrd\phi dk$$

$$\int_V z\rho(\vec{r})dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^z k\rho_0\left(1-\left(\frac{k}{H}\right)^2\right)rdrd\phi dk$$

Las primeras dos integrales se anulan ya que la integral con respecto a la coordenada azimutal $\phi$ se anula, esto en virtud de que:

$$\int_0^{2\pi}\cos(\phi)d\phi = 0 \quad ; \quad \int_0^{2\pi}\sin(\phi)d\phi = 0 \tag{4}$$

Esto nos dice que la componente en la dirección $\hat{x}$ y $\hat{y}$ del centro de masa es nula, es decir, el centro de masa está directamente por encima del centro del fondo del recipiente (es decir, sólo en la dirección $\hat{z}$). Esto es algo que también podríamos deducir físicamente; dado que hay simetría axial y la densidad sólo varía con la altura, en la dirección $\hat{x}$ y $\hat{y}$ tenemos la misma cantidad de masa hacia el lado positivo y negativo de las posiciones, entonces el promedio de estas posiciones (ponderadas por la masa uniforme) será cero.

[1] La mezcla se ve idéntica para cualquier ángulo alrededor del eje de simetría del recipiente.

[2] En este caso uso $k$ en vez de $z$ ya que este último es nuestro límite de integración en la coordenada asociada a la altura.

[3] Esto es posible ya que los vectores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ son los únicos que pueden salir de cualquier integral sin importar el sistema de coordenadas en el cual se expresa.

Con todo esto tendremos entonces que:

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \hat{z}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^z k\rho_0 \left(1 - \left(\frac{k}{H}\right)^2\right) rdrd\phi dk$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \rho_0\hat{z}\left(\int_0^R rdr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^z k\left(1 - \left(\frac{k}{H}\right)^2\right)dk\right)$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \rho_0\hat{z}\left(\frac{R^2}{2}\right)(2\pi)\left(\int_0^z kdk - \frac{1}{H^2}\int_0^z k^3dk\right)$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \pi R^2\rho_0\hat{z}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4H^2}\right)$$

Para obtener el centro de masa nos falta dividir por la masa total $M$, la cual corresponde a la integral de la densidad de masa por el volumen, es decir:

$$M = \int_V \rho(\vec{r})dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^z \rho_0 \left(1 - \left(\frac{k}{H}\right)^2\right) rdrd\phi dk$$

$$\Rightarrow M = \rho_0\left(\int_0^R rdr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^z \left(1 - \left(\frac{k}{H}\right)^2\right)dk\right) \Rightarrow M = \pi R^2\rho_0\left(z - \frac{z^3}{3H^2}\right)$$

Entonces, reemplazando lo encontrado en la expresión (2) se tiene que:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \frac{\pi R^2\rho_0\hat{z}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4H^2}\right)}{\pi R^2\rho_0\left(z - \frac{z^3}{3H^2}\right)} \Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{4H^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{3H^2}\right)}\hat{z}$$

Por último reemplazamos la expresión para $z(t)$ entregada en el enunciado, y luego de reordenar obtenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{\text{cm}}(t) = \frac{\frac{H}{2}\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^3\right]}{\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right]}\hat{z}}$$

b) Por definición la velocidad corresponde a la derivada de la posición respecto al tiempo, entonces si tenemos $\vec{R}_{\text{cm}}$ explícitamente en función del tiempo, la forma más conveniente de encontrar la velocidad del centro de masa es derivar directamente esta expresión, entonces:

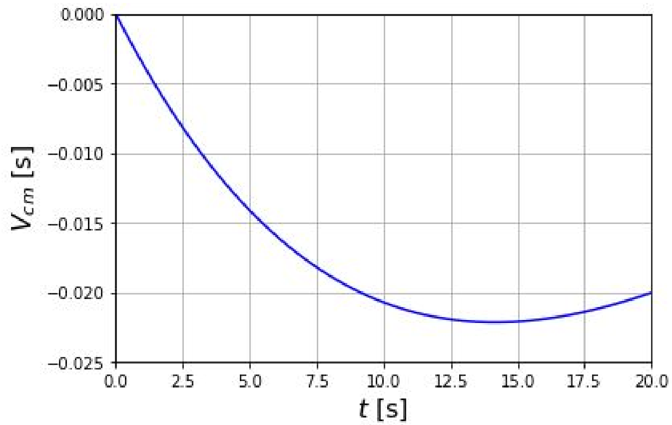
$$\vec{V}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{R}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{H}{2}\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^3\right]}{\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right]}\hat{z}\right\}$$

El vector unitario $\hat{z}$ permanece siempre fijo en el espacio, entonces no cambia en el tiempo y puede salir de la derivada. El resto lo trabajamos con la derivada de una división, y entonces:

$$\Rightarrow \vec{V}_{\text{cm}} = \frac{H}{2}\hat{z}\left\{\frac{\left[-\frac{1}{T} + \frac{3}{2T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right] - \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^3\right]\left[\frac{2}{3T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\right]}{\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right]^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{\text{cm}} = \frac{H}{2T}\left\{\frac{\left[-1+\frac{7}{6}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2-\frac{1}{6}\left(1-\frac{t}{T}\right)^4\right]}{\left[1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2\right]^2}\right\}\hat{z}}$$

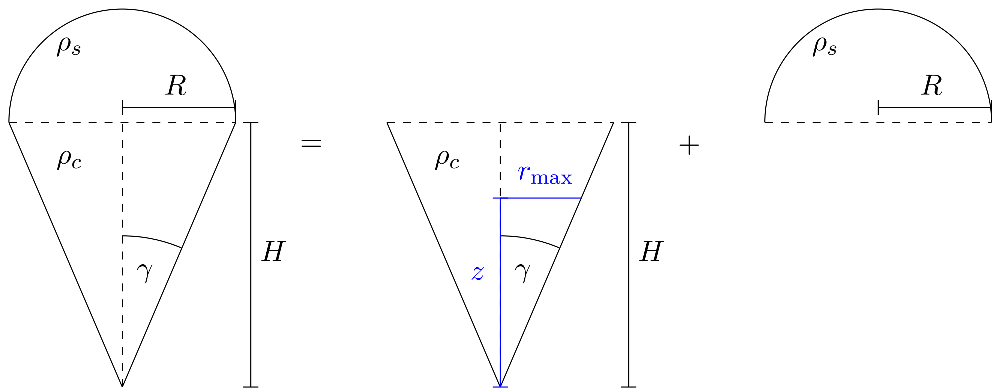
Al graficar esta expresión usando $H = 0{,}8$ m y $T = 20$ s se obtiene el siguiente resultado:




Se puede observar que la velocidad del centro de masa es siempre negativa, lo cual hace referencia a que este punto del sistema de partículas siempre está bajando a lo largo del tiempo, lo cual es consistente con el hecho de que la mezcla va bajando dentro del recipiente en todo momento.

**P2. <u>Centro de masa de un cono de helado</u>:**

Dado que nos entregan densidades de masa, nuevamente debemos calcular el centro de masa de nuestro sistema a partir de la definición (2) para un sistema continuo y volumétrico. Sin embargo, como el cono y la semiesfera tienen distintas densidades, entonces no es conveniente calcular el centro de masa de forma directa, sino que una mejor forma de abordar el problema es calcular el centro de masa del cono y de la semiesfera por separado y luego los sumamos[4] en virtud del *principio de superposición*, el cual nos dice que para una configuración compleja el centro de masa puede calcularse como la superposición de centros de masa de subsistemas más sencillos. Entonces, en este caso separamos nuestro sistema en el cono y la semiesfera:




Usaremos como origen el vértice del cono, de tal forma que en este punto $\hat{z}$ apunta hacia arriba, y así podemos usar coordenadas cilíndricas para abordar el problema. Partiremos calculando el centro de masa del cono, y si usamos coordenadas cilíndricas entonces el diferencial de volumen es $dV = rdrd\phi dz$, donde $r$, $\phi$ y $z$ son la coordenada radial, azimutal y altura de este sistema de coordenadas. Ahora, debemos asegurarnos de que los límites de integración que usemos en el cálculo de las integrales del centro de masa coincidan con los límites físicos de nuestro sistema de partículas (en este caso el cono), por lo tanto en este caso debemos identificar que las coordenadas $r$ y $z$ **no son independientes**, ya que a medida que cambiamos la altura los límites de integración del radio cambian (ya que nos encontramos con secciones cada vez más anchas del cono, a diferencia de cuando integramos en un cilindro, donde el radio máximo con respecto a la altura es constante).

Si miramos la figura anterior podemos ver que $r_{\max}$ (límite superior de la integral radial) y $z$ están relacionados de forma tal que se cumple una regla de tres, es decir:

$$\frac{H}{R} = \frac{z}{r_{\max}} \Rightarrow r_{\max}(z) = \frac{R}{H}z$$

Entonces, al momento de integrar tendremos los siguientes límites de integración asociados a los límites físicos de nuestro sistema de partículas:

$$r \in [0, r_{\max}] \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad ; \quad z \in [0, H]$$

Como la el radio depende de la altura, primero debemos hacer las integrales con respecto a $r$, y luego reemplazamos la expresión de $r_{\max}$ en función de la altura $z$ para calcular la integral con respecto a esta coordenada.

[4]Es importante recordar que para sumar estos centros de masa, estos deben calcularse con respecto a un mismo origen.

Entonces, usando la definición (2) del centro de masa, partamos calculando la integral del numerador:

$$\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\max}(z)} \vec{r}\rho_c r dr d\phi dz$$

Tal como se explicó en el ejercicio anterior, en esta expresión conviene representar el vector $\vec{r}$ en sus componentes cartesianas, pero escribiendo cada componente en las coordenadas usadas para la integral. Por ejemplo, en este caso la posición $\vec{r}$ de una partícula arbitraria del sistema se puede representar como $\vec{r} = r\cos(\phi)\hat{x} + r\sin(\phi)\hat{y} + z\hat{z}$, donde cada componente cartesiana se representa con las coordenadas cilíndricas ya que son las coordenadas usadas para resolver la integral. Tomando en cuenta esto, y comparando el sistema con el del ejercicio anterior, podemos ver que se tiene simetría axial, por lo tanto las integrales asociadas a las componentes en $\hat{x}$ e $\hat{y}$ se anulan[5], y así:

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \rho_c\hat{z}\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\max}(z)} z r dr d\phi dz$$

En esta parte la integral con respecto a la coordenada $\phi$ sólo nos entrega un factor $2\pi$, mientras que la integral con respecto a la coordenada radial es directa, entonces:

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = 2\pi\rho_c\hat{z}\int_0^H z\left(\int_0^{r_{\max}(z)} r dr\right)dz \Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = 2\pi\rho_c\hat{z}\int_0^H z\left(\frac{r_{\max}^2(z)}{2}\right)dz$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \pi\rho_c\hat{z}\int_0^H z\left(\frac{R}{H}z\right)^2 dz \;\Rightarrow\; \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \frac{\pi\rho_c R^2}{H^2}\hat{z}\int_0^H z^3 dz$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \frac{\pi\rho_c R^2}{H^2}\hat{z}\frac{H^4}{4} \;\Rightarrow\; \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \frac{1}{4}\pi\rho_c R^2 H^2\hat{z}$$

Ahora debemos calcular la masa total $M_c$ del cilindro, la cual por definición es:

$$M_c = \int_V \rho(\vec{r})dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\max}(z)} \rho_c r dr d\phi dz$$

$$\Rightarrow M_c = 2\pi\rho_c\int_0^H \left(\int_0^{r_{\max}(z)} r dr\right)dz \Rightarrow M_c = 2\pi\rho_c\int_0^H \left(\frac{r_{\max}^2(z)}{2}\right)dz$$

$$\Rightarrow M_c = \pi\rho_c\int_0^H \left(\frac{R}{H}z\right)^2 dz = \frac{\pi\rho_c R^2}{H^2}\int_0^H z^2 dz \;\Rightarrow\; M_c = \frac{\pi\rho_c R^2}{H^2}\frac{H^3}{3} \;\Rightarrow\; M_c = \frac{1}{3}\pi\rho_c R^2 H$$

Entonces, el centro de masa $\vec{R}_{\mathrm{c}}^{(c)}$ del cono con respecto a su vértice es:

$$\vec{R}_{\mathrm{c}}^{(c)} = \frac{1}{M_c}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho_c R^2 H^2\hat{z}}{\frac{1}{3}\pi\rho_c R^2 H} \;\Rightarrow\; \vec{R}_{\mathrm{c}}^{(c)} = \frac{3}{4}H\hat{z}$$

Ahora, para la semiesfera sabemos de cátedra que si su densidad es uniforme entonces su centro de masa está a una altura $\frac{3}{8}R$ con respecto al centro de su base, sin embargo queremos el centro de masa **con respecto al vértice del cono**, por lo tanto a la altura recién mencionada debemos sumarle la altura $H$

[5]Esto se puede demostrar matemáticamente si se reemplaza la expresión completa para $\vec{r}$ y se aplican las identidades mostradas en (4).

desde el vértice del cono hasta el centro de la base de la semiesfera, y de esa forma el centro de masa $\vec{R}_c^{(s)}$ de la semiesfera con respecto al vértice del cono es:

$$\vec{R}_c^{(s)} = \left(\frac{3}{8}R + H\right)\hat{z}$$

Ahora que tenemos el centro de masa de cada subsistema del sistema de partículas podemos encontrar el centro de masa total usando el principio de superposición, para lo cual consideramos dos partículas puntuales de masas $M_c$ y $M_s$, con posiciones $\vec{R}_c^{(c)}$ y $\vec{R}_c^{(s)}$, respectivamente, y entonces usando la definición (1) de centro de masa para un sistema discreto de partículas tendremos que:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{M_c\vec{R}_c^{(c)} + M_s\vec{R}_c^{(s)}}{M_c + M_s}$$

Para calcular esta cantidad sólo nos falta la masa $M_s$ de la esfera, y como su densidad es uniforme, entonces podemos calcular esta masa multiplicando la densidad $\rho_s$ por el volumen $V_s$ de la semiesfera, entonces:

$$M_s = \rho_s V_s \;\Rightarrow\; M_s = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_s$$

Entonces, reemplazando los elementos encontrados a lo largo del ejercicio en la expresión para $\vec{R}_{\text{cm}}$ se tiene que:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\pi\rho_c R^2 H \frac{3}{4}H\hat{z}\right) + \left(\frac{2}{3}\pi R^3\rho_s\left(\frac{3}{8}R + H\right)\hat{z}\right)}{\frac{1}{3}\pi\rho_c R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3\rho_s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{\text{cm}} = \left(\frac{\frac{3}{4}\rho_c H^2 + \frac{3}{4}\rho_s R^2 + 2\rho_s RH}{\rho_c H + 2\rho_s R}\right)\hat{z}}$$