FI2001-4 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.

Desarrollo Auxiliar 5: Elementos de una curva.

31 de Marzo del 2022

P1. Partícula cargada en caída libre:

a) Para encontrar las ecuaciones de movimiento debemos aplicar la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ en algún sistema de referencia con coordenadas convenientes. Dado que acá no existe ninguna simetría (ni cilíndrica ni esférica) lo mejor es partir con coordenadas cartesianas para abordar el problema. En ese sentido suponemos que la partícula tiene las siguientes cantidades cinemáticas expresadas vectorialmente:

$$\vec{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad ; \quad \vec{v}(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \quad ; \quad \vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

Con la tercera expresión podemos escribir el lado derecho de la segunda ley de Newton, sólo nos falta revisar el lado izquierdo, que corresponde a la fuerza neta que siente la partícula. En este caso las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso y la fuerza electromagnética. Usando un sistema de referencia tal que $\hat{y}$ y $\hat{z}$ son la dirección horizontal y vertical (respectivamente) del dibujo del enunciado, y tal que $\hat{x}$ sale de la hoja, entonces se tiene que el peso es $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$. Por otro lado la fuerza electromagnética puede calcularse usando la velocidad mostrada anteriormente, entonces:

$$\vec{F}_e = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}\right) \times \left(B\hat{x}\right) \;\Rightarrow\; \vec{F}_e = qB\left(\dot{z}\hat{y} - \dot{y}\hat{z}\right)$$

Entonces, aplicando la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ se tiene que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{F}_g + \vec{F}_e = m\left(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}\right)$$
$$\Rightarrow\; -mg\hat{z} + qB\dot{z}\hat{y} - qB\dot{y}\hat{z} = m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z}$$

Separamos los términos asociados al mismo vector unitario, y entonces:

$$\Rightarrow\; m\ddot{x} = 0 \quad ; \quad m\ddot{y} = qB\dot{z} \quad ; \quad m\ddot{z} = -qB\dot{y} - mg$$

Despejando la aceleración asociada a cada componente encontramos las ecuaciones de movimiento, entonces:

$$\Rightarrow\; \boxed{\ddot{x} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \quad ; \quad \ddot{z} = -\frac{qB}{m}\dot{y} - g} \tag{1}$$

b) Para caracterizar la trayectoria de la partícula necesitamos encontrar las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ que cuantifican la posición de la partícula a lo largo del tiempo, las cuales podemos obtener mediante integración de las ecuaciones de movimiento encontradas anteriormente. Primero veamos cuáles son nuestras condiciones iniciales. Como la partícula se suelta desde cierta altura entonces estamos en el caso de caída libre, lo cual nos dice que la velocidad inicial de la partícula es cero, es decir, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Por otro lado podemos ubicar nuestro origen en el punto de la superficie terrestre que está justo por debajo de la posición inicial de la partícula, de tal forma que $x(0) = y(0) = 0$ y $z(0) = z_0$.

Como ya tenemos claras nuestras condiciones iniciales tratemos de integrar las ecuaciones de movimiento mostradas en (1). Partiendo por la ecuación asociada a la coordenada x:

$$\ddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{d\dot{x}}{dt}dt = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = 0$$
$$\Rightarrow\; \int_0^t \frac{dx}{dt}dt = 0 \;\Rightarrow\; x(t) - x(0) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = 0$$

Con este resultado podemos entender que el movimiento es en el plano YZ. Ahora, viendo las últimas dos expresiones mostradas en (1) notamos que no es directo integrar para obtener $y(t)$ y $z(t)$, ya que sus ecuaciones de movimiento están *acopladas*, es decir, la aceleración en una dirección depende de las cantidades cinemáticas de la otra dirección, y viceversa. Para desacoplar estas ecuaciones podemos derivar la expresión para $\ddot{y}$ con respecto al tiempo, entonces:

$$\ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \;\Rightarrow\; \dddot{y} = \frac{qB}{m}\ddot{z}$$

Reemplazando la expresión que tenemos para $\ddot{z}$:

$$\Rightarrow\; \dddot{y} = \frac{qB}{m}\left(-\frac{qB}{m}\dot{y} - g\right) \;\Rightarrow\; \dddot{y} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{y} - \frac{qBg}{m}$$

Para resolver esta ecuación observamos dos cosas. Primero, el lado derecho de la igualdad es proporcional a $\dot{y}$, mientras que el lado izquierdo es proporcional a la segunda derivada de este término (es decir, $\dddot{y}$). Esto nos debería recordar la ecuación de movimiento del oscilador armónico[1], entonces el primer cambio de variable que nos conviene hacer es $\dot{y} = v$, con lo cual $\dddot{y} = \ddot{v}$, y así la ecuación anterior cambia a:

$$\Rightarrow\; \ddot{v} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v - \frac{qBg}{m}$$

Por otro lado podemos hacer un cambio de variable que elimine la constante del lado derecho. En ese sentido, usando $v = v' - \frac{mg}{qB}$, con lo cual $\ddot{v} = \ddot{v}'$, se tiene que:

$$\Rightarrow\; \ddot{v}' = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2\left(v' - \frac{mg}{qB}\right) - \frac{qBg}{m} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v' + \frac{qBg}{m} - \frac{qBg}{m}$$
$$\Rightarrow\; \ddot{v}' = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v'$$

La solución a esta ecuación diferencial es una combinación lineal entre un seno y un coseno, entonces:

$$\Rightarrow\; v'(t) = A\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Deshaciendo los cambios de variable se tiene que:

$$v = v' - \frac{mg}{qB} \;\Rightarrow\; v(t) = A\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}$$
$$\dot{y} = v \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = A\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}$$

[1]En un oscilador armónico de variable $\theta(t)$ la ecuación de movimiento es $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$

Ahora, para obtener $\dot{z}$ podemos usar la segunda expresión de (1), para lo cual necesitamos calcular $\ddot{y}$, entonces:

$$\Rightarrow\ \ddot{y}(t) = -\frac{qBA}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{qBC}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\ \Rightarrow\ \frac{qB}{m}\dot{z} = -\frac{qBA}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{qBC}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$\Rightarrow\ \dot{z}(t) = -A\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales para encontrar las constantes de integración A y C. Recordamos que la condición de caída libre implica que $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, entonces:

$$\dot{y}(0) = 0\ \Rightarrow\ A - \frac{mg}{qB} = 0\ \Rightarrow\ A = \frac{mg}{qB} \quad ; \quad \dot{z}(0) = 0\ \Rightarrow\ C = 0$$

Con esto finalmente obtenemos las componentes de la velocidad de la partícula:

$$\Rightarrow\ \boxed{\dot{x}(t) = 0 \quad ; \quad \dot{y}(t) = \frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right) \quad ; \quad \dot{z}(t) = -\frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)} \tag{2}$$

Ahora, si queremos caracterizar la trayectoria debemos integrar nuevamente con respecto al tiempo para encontrar la posición en cada eje. Dado que la condición inicial en el eje $\hat{x}$ es que $x(0) = 0$, y como la expresión anterior nos muestra que la velocidad en ese eje en todo instante de tiempo es nula, entonces podemos concluir que $x(t) = 0$. Para la coordenada $y(t)$, usando la condición inicial $y(0) = 0$ se tiene que:

$$\dot{y}(t) = \frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\ \Rightarrow\ \int_0^t \frac{dy}{dt}dt = \frac{mg}{qB}\int_0^t \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)dt - \frac{mg}{qB}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow\ y(t) - y(0) = \frac{mg}{qB}\frac{m}{qB}\left[\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \sin(0)\right] - \frac{mg}{qB}(t - 0)$$

$$\Rightarrow\ y(t) = \frac{m^2 g}{q^2B^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}t$$

Para la coordenada $z(t)$ usamos la condición inicial $z(0) = z_0$, entonces:

$$\dot{z}(t) = -\frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\ \Rightarrow\ \int_0^t \frac{dz}{dt}dt = -\frac{mg}{qB}\int_0^t \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)dt$$

$$\Rightarrow\ z(t) - z(0) = -\frac{mg}{qB}\left(-\frac{m}{qB}\right)\left[\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - \cos(0)\right]$$

$$\Rightarrow\ z(t) = z_0 + \frac{m^2 g}{q^2B^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)$$

Entonces, con esto se tiene finalmente que:

$$\Rightarrow\ \boxed{x(t) = 0 \quad ; \quad y(t) = \frac{m^2 g}{q^2B^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}t \quad ; \quad z(t) = z_0 + \frac{m^2 g}{q^2B^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)} \tag{3}$$

c) Por definición el vector tangencial $\hat{t}$ apunta en la dirección y sentido en que apunta el cambio del vector posición $\vec{r}$ cuando variamos infinitesimalmente el tiempo. Como es un vector unitario, la expresión para construir $\hat{t}$ es:

$$\hat{t} = \left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\right|^{-1} \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4}$$

Sabemos que por definición $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es el vector velocidad $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$, entonces usando los resultados mostrados en (2) se tiene que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\hat{y} - \frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z} \tag{5}$$

Ahora calculamos el módulo de este vector:

$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{mg}{qB}\right)^2\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)^2 + \left(\frac{mg}{qB}\right)^2\sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)}$$

$$\Rightarrow \left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\right| = \frac{mg}{qB}\sqrt{\cos^2\left(\frac{qB}{m}t\right) - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)} \Rightarrow \left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\right| = \frac{mg}{qB}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)} \tag{6}$$

Entonces, aplicando la definición (4) se tiene que:

$$\Rightarrow \hat{t} = \boxed{\frac{\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}}\hat{y} - \frac{\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}}\hat{z}}$$

Para el radio de curvatura R, si usamos la notación de puntos para la derivada temporal se tiene que:

$$R = \frac{||\dot{\vec{r}}||^3}{||\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}||} \tag{7}$$

El vector aceleración $\ddot{\vec{r}}$ se puede obtener calculando $\ddot{y}$ y $\ddot{z}$ a partir de las ecuaciones de movimiento obtenidas en (1), entonces:

$$\ddot{y} = -g\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad ; \quad \ddot{z} = -g\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -g\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{y} - g\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z}$$

Ahora realizamos el producto cruz entre este vector y el vector velocidad mostrado en (5), y entonces:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \left[\frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\hat{y} - \frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z}\right] \times \left[-g\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{y} - g\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{mg^2}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)(\hat{y} \times \hat{z}) + \frac{mg^2}{qB}\sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)(\hat{z} \times \hat{y})$$

$$\Rightarrow\ \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = -\frac{mg^2}{qB}\left[\cos^2\left(\frac{qB}{m}t\right) - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]\hat{x}$$

$$\Rightarrow\ \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = -\frac{mg^2}{qB}\left(1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)\hat{x}\ \Rightarrow\ ||\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|| = \frac{mg^2}{qB}\left(1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right) \tag{8}$$

Entonces, usando este resultado y el módulo de la velocidad $||\dot{\vec{r}}||$ mostrado en (6) en la definición (7) de radio de curvatura, se tiene que:

$$R = \frac{\left(\frac{mg}{qB}\right)^3\left(2-2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{mg^2}{qB}\left(1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)} = \frac{\sqrt{8}m^2g}{q^2B^2}\left[\frac{\left(1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}\right]$$

$$\Rightarrow\ \boxed{R(t) = \frac{\sqrt{8}m^2g}{q^2B^2}\sqrt{1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}}$$

d) Si agregamos una fuerza de roce viscoso $\vec{F}_r = -\lambda\vec{v}$ entonces las ecuaciones de movimiento cambian. Tomando en cuenta una velocidad arbitraria, la fuerza de roce viscoso es $\vec{F}_r = -\lambda\dot{y}\hat{y} - \lambda\dot{z}\hat{z}$, entonces añadiendo a las ecuaciones de movimiento del caso sin roce:

$$m\ddot{y} = qB\dot{z} - \lambda\dot{y} \quad ; \quad m\ddot{z} = -qB\dot{y} - \lambda\dot{z} - mg$$

$$\Rightarrow\ \ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} - \frac{\lambda}{m}\dot{y} \quad ; \quad m\ddot{z} = -\frac{qB}{m}\dot{y} - \frac{\lambda}{m}\dot{z} - g$$

Desacoplar estas ecuaciones es un poco más difícil que el caso anterior, pero no es importante para el contexto de este curso, y en ese sentido esta parte del cálculo no será explicada con mucho detalle (hasta una pauta futura). Primero se hace un cambio de variable que quita la constante $-g$ de la segunda ecuación:

$$\dot{y} = \dot{y}' - \frac{mg}{qB + \frac{\lambda^2}{qB}} \quad ; \quad \dot{z} = \dot{z}' - \frac{mg}{\lambda + \frac{q^2B^2}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow\ \ddot{y}' = \frac{qB}{m}\dot{z}' - \frac{\lambda}{m}\dot{y}' \quad ; \quad \ddot{z}' = -\frac{qB}{m}\dot{y}' - \frac{\lambda}{m}\dot{z}' \tag{9}$$

Ahora despejamos $\dot{z}'$ de la primera ecuación, y derivando obtenemos $\ddot{z}'$:

$$\dot{z}' = \frac{m}{qB}\ddot{y}' + \frac{\lambda}{qB}\dot{y}'\ \Rightarrow\ \ddot{z}' = \frac{m}{qB}\dddot{y}' + \frac{\lambda}{qB}\ddot{y}'$$

Reemplazamos esto en la segunda expresión mostrada en (9), y entonces:

$$\Rightarrow\ \frac{m}{qB}\dddot{y}' + \frac{\lambda}{qB}\ddot{y}' = -\frac{qB}{m}\dot{y}' - \frac{\lambda}{m}\left(\frac{m}{qB}\ddot{y}' + \frac{\lambda}{qB}\dot{y}'\right)$$

Usando el cambio de variable $\dot{y}' = v$ y desarrollando podemos llegar a una EDO de segundo orden:

$$\Rightarrow\ \ddot{v} + \frac{2\lambda}{m}\dot{v} + \left(\left(\frac{qB}{m}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right)v = 0 \tag{10}$$

Esta es una EDO lineal de segundo orden, por lo tanto proponemos soluciones de la forma $v(t) = e^{\alpha t}$, y así:

$$\Rightarrow \ \alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{2\lambda}{m}\alpha e^{\alpha t} + \left(\left(\frac{qB}{m}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right) e^{\alpha t} = 0 \ \Rightarrow \ \alpha^2 + \frac{2\lambda}{m}\alpha + \left(\left(\frac{qB}{m}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ \alpha = -\frac{\lambda}{m} \pm \frac{qB}{m} i$$

La solución general de la ecuación diferencial es una superposición de ambas soluciones (cada una asociada a cada signo de la expresión anterior, y entonces:

$$\Rightarrow \ v(t) = C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{m} - \frac{qB}{m} i\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{m} + \frac{qB}{m} i\right)t} \ \Rightarrow \ v(t) = \left(C_1 e^{-i\frac{qB}{m}t} + C_2 e^{i\frac{qB}{m}t}\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

El término entre paréntesis también puede escribirse como senos y cosenos, entonces:

$$\Rightarrow \ v(t) = \left(A\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right) e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Lo importante de esta parte es poder solucionar la EDO asociada a un movimiento con disipación (es decir, la expresión (10)), por lo tanto expresaré el resultado para la velocidad en cada eje, con lo cual es posible calcular $\hat{t}$ y R:

$$\dot{y}(t) = \left[\left(\frac{mg}{qB + \frac{\lambda^2}{qB}}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \left(\frac{mg}{\lambda + \frac{q^2B^2}{\lambda}}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{qB + \frac{\lambda^2}{qB}}$$

$$\dot{z}(t) = \left[-\left(\frac{mg}{qB + \frac{\lambda^2}{qB}}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \left(\frac{mg}{\lambda + \frac{q^2B^2}{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda + \frac{q^2B^2}{\lambda}}$$