FI2001-4 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, Lucciano Letelier.

Desarrollo Auxiliar 2: Dinámica de sistemas simples.

17 de Marzo del 2022

P1. Espacio de fase del MRUA:

a) El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado consiste en una partícula moviéndose en un camino unidimensional con aceleración constante a. Con esto en mente, si la posición de esta partícula se modela a través de la función posición $x(t)$, la ecuación de movimiento del MRUA es:

$$\ddot{x} = a$$

Podemos integrar directamente esta ecuación diferencial. Primero que todo recordemos que la aceleración es, por definición, la derivada temporal de la velocidad, de tal forma que:

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = a$$

Podemos integrar a ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo desde $t = 0$ hasta un instante de tiempo arbitrario t, entonces:

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d\dot{x}}{dt} dt = \int_0^t a dt$$

La integral del lado derecho es directa, mientras que la integral del lado izquierdo se resuelve automáticamente en virtud del teorema fundamental del cálculo[1], entonces:

$$\Rightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = at \Rightarrow \dot{x}(t) - v_0 = at \Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 + at \tag{1}$$

Ahora podemos integrar nuevamente este resultado tomando en cuenta que la velocidad es la derivada temporal de la posición, entonces:

$$\dot{x}(t) = v_0 + at \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt$$

Nuevamente el lado izquierdo se desarrolla usando el teorema fundamental del cálculo, mientras que las integrales del lado derecho son bastante directas, entonces:

$$\Rightarrow x(t) - x(0) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2} \tag{2}$$

Este resultado corresponde a la ecuación de itinerario del MRUA que aprendimos en los cursos anteriores de física, la cual se obtuvo por integración directa de la ecuación de movimiento del sistema.

b) Ahora queremos encontrar una relación $\dot{x}(x)$, es decir, queremos encontrar una relación entre la velocidad y la posición del MRUA, pero que a la vez no dependa del tiempo (para poder bosquejar el espacio de fase).

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo#Corolario

Como la relación de la posición es proporcional al tiempo al cuadrado, puede ser útil encontrar una relación para la velocidad que involucre un término similar, para lo cual elevamos al cuadrado la expresión (1), entonces:

$$\Rightarrow \ \dot{x}^2 = (v_0 + at)^2 \ \Rightarrow \ \dot{x}^2 = v_0^2 + 2av_0 t + a^2 t^2$$

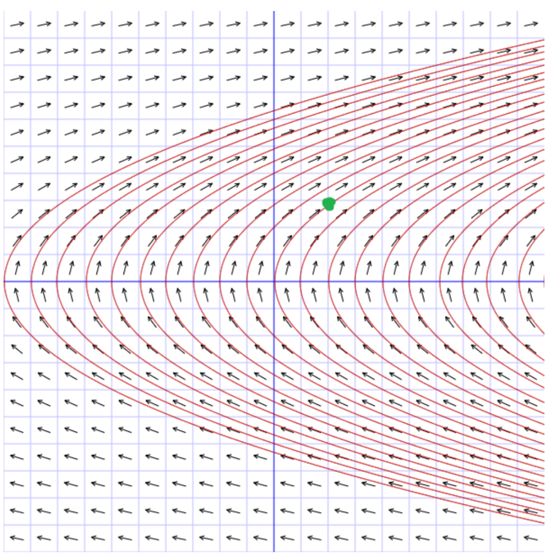
Podemos llegar a una expresión similar si multiplicamos por $2a$ la expresión (2) obtenida en la parte anterior:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \ \Rightarrow \ 2a\,(x - x_0) = 2av_0 t + a^2 t^2$$

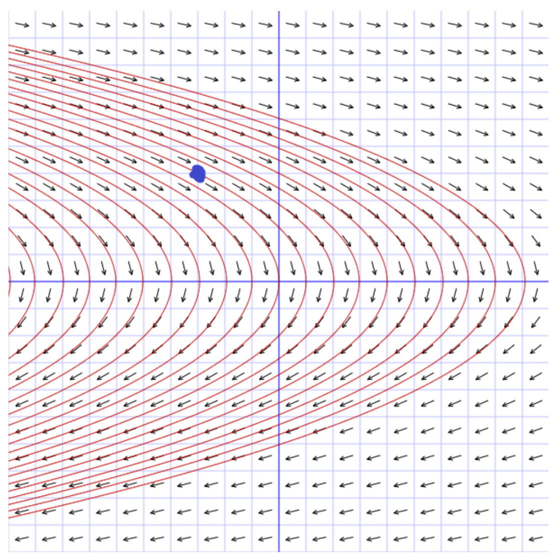
Combinando los resultados obtenidos y desarrollando es posible encontrar la relación $\dot{x}(x)$:

$$\Rightarrow \ \dot{x}^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0) \ \Rightarrow \ \boxed{\dot{x}(x) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}$$

Es sencillo notar que las curvas del espacio de fase son parábolas horizontales, cuyo vértice apunta hacia la izquierda o derecha si la aceleración a es positiva o negativa, respectivamente[2]. Tomando eso en consideración, el espacio de fase se ve parecido a esto:



Caso a>0



Caso a<0

Podemos notar que el sentido de las curvas es consistente con las características físicas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Por ejemplo, si partimos nuestro movimiento en $x_0 = 2$ m con una velocidad $v_0 = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en un caso con aceleración positiva (punto verde) entonces lo natural es que tanto la posición como la velocidad aumenten, lo que se refleja en el sentido que evoluciona la curva asociada en el espacio de fase. De la misma forma, si en el caso con aceleración negativa partimos en una zona con velocidad positiva (punto azul) el objeto logrará avanzar cierta distancia, pero en algún instante la aceleración negativa hace que se detenga (cuando corta al eje horizontal) y luego adquiere una velocidad negativa, alejándose hacia el infinito negativo en el espacio.

[2]Para comprender esto podemos despejar $x(\dot{x})$ y notar que cumple la ecuación de una parábola vertical en el plano $\dot{x} - x$.

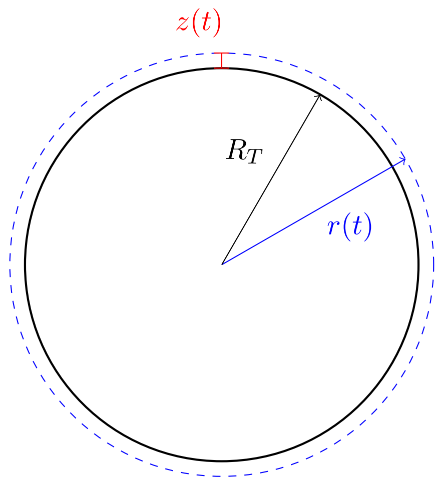
P2. Movimiento vertical cerca del ecuador:

a) La ley de gravitación universal nos dice que la fuerza con la cual un objeto de masa m se siente atraído hacia la Tierra es:

$$\vec{F}_T = -\frac{GmM_T}{r^2}\hat{r}$$

En esta expresión G es la *constante de gravitación universal*, M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente, r es la distancia que separa al centro de la Tierra (origen) con el objeto, y $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta desde el centro de la Tierra hacia el objeto de interés. Esta fuerza es la responsable de mantener en órbita a la Luna, y también es la causa de que los objetos caigan a la superficie terrestre. En esta pregunta queremos mostrar de forma explícita esto último, es decir, queremos mostrar que esta fuerza modela el movimiento vertical acelerado por gravedad que conocemos desde el primer curso de física, el cual modela la caída de objetos.

Primero, como sólo nos interesa el movimiento cerca de la superficie terrestre, entonces los valores válidos para la altura $z(t)$ de nuestro objeto (medida desde la superficie) serán despreciables en comparación con el radio de la Tierra, es decir, $R_T \gg z(t)$ para todo instante de tiempo, como se ilustra en la siguiente figura:



Ahora, la fuerza $\vec{F}_T$ se calcula con la distancia $r(t)$ (medida desde el centro de la Tierra), la cual podemos relacionar con la altura $z(t)$ a través de la expresión $r(t) = R_T + z(t)$. Dado que $R_T \gg z(t)$ entonces $R_T + z(t) \approx R_T$, con lo cual $r(t) \approx R_T$. Con esa aproximación la fuerza $\vec{F}_T$ nos queda como:

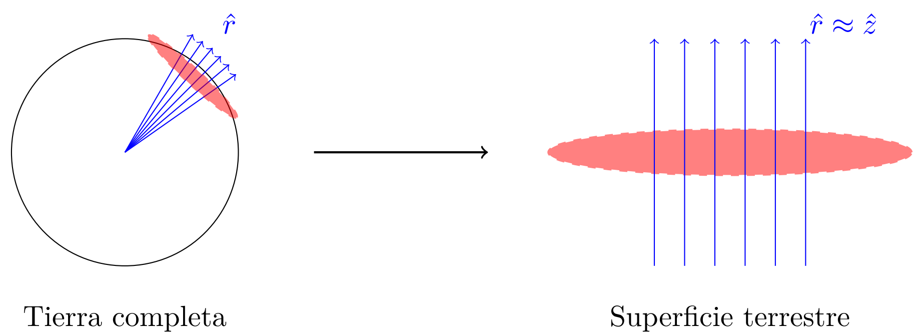
$$\vec{F}_T \approx -\frac{GmM_T}{R_T^2}\hat{r}$$

Podemos notar que la magnitud de esta fuerza ahora sólo depende de la masa m del objeto que lanzamos verticalmente, ya que el resto de magnitudes es constante. Tomando en cuenta esto es conveniente juntar todas las constantes en una sola, la cual llamaremos g, entonces:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \;\Rightarrow\; \vec{F}_T = -mg\hat{r}$$

Si reemplazamos los valores de G, M_T y R_T en unidades del *SI* obtendremos el valor $g \approx 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ que conocemos de cultura general.

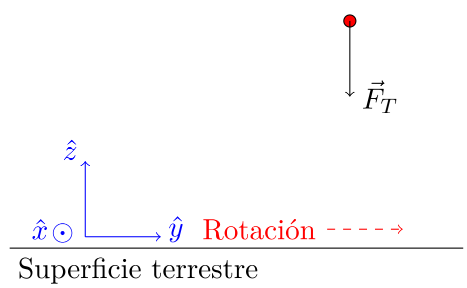
Ahora sólo nos falta hacer una aproximación con respecto al vector $\hat{r}$. La Tierra es una esfera tan grande que en las cercanías de su superficie parece aproximadamente plana. Eso hace que el vector $\hat{r}$ varíe muy poco desde el punto de vista de un observador en la superficie terrestre, tal como se ilustra en la siguiente figura:



Esto nos muestra que la fuerza $\vec{F}_T$ se puede tomar como una fuerza puramente vertical en el sistema de referencia cercano a la superficie terrestre para todos los puntos de ésta[3]. En ese sentido, si definimos $\hat{z}$ como el vector unitario perpendicular a la superficie terrestre, en esta aproximación podemos tomar $\hat{r} \approx \hat{z}$, y entonces reemplazando en la fuerza $\vec{F}_T$ llegamos al resultado que buscábamos:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_T \approx -mg\hat{z}}$$

b) El *lugar geométrico* que describe la partícula hace referencia a la *ecuación de la curva* que describe la trayectoria de la partícula en el plano perpendicular a la superficie terrestre y paralelo a la línea ecuatorial. Para armar nuestro sistema de referencia usaremos como dirección vertical $\hat{z}$, usaremos al vector $\hat{y}$ paralelo a la línea ecuatorial y apuntando de oeste a este, y usaremos al vector $\hat{x}$ apuntando de norte a sur en la dirección perpendicular al ecuador. Con todo esto, el lanzamiento vertical de una partícula se representa en el siguiente esquema:



El lugar geométrico que buscamos hace referencia a la curva $z(y)$ que modela matemáticamente la trayectoria en el plano YZ. Para tomar en cuenta los efectos de la rotación terrestre añadimos una fuerza $\vec{F}_c = -2m\,(\vec{v} \times \vec{\omega})$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula, y $\vec{\omega}$ es la velocidad angular asociada a la rotación terrestre. Tomando en consideración una rotación de intensidad ω, como esta rotación va de oeste a este, entonces por regla de la mano derecha[4] la dirección y sentido de la velocidad angular es $-\hat{x}$, entonces $\vec{\omega} = -\omega\hat{x}$. Por otro lado nos piden estudiar el movimiento sólo en un plano perpendicular a la superficie terrestre, que en este sistema de referencia corresponde al plano YZ,

[3] En el caso de una curvatura más pequeña los vectores no serían paralelos en distintos puntos de la superficie.
[4] `https://www.youtube.com/watch?v=HqyZ5LNrW70`

por lo tanto la velocidad de la partícula corresponde a una combinación de velocidades en estas dos direcciones, es decir, $\vec{v} = \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$.
Como tenemos $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$ podemos calcular $\vec{F}_c$, entonces:

$$\vec{F}_c = -2m\left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right) = -2m\left(\left(-\omega\hat{x}\right) \times \left(\dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}\right)\right) \;\Rightarrow\; \vec{F}_c = 2m\omega\left(\dot{y}\left(\hat{x} \times \hat{y}\right) + \dot{z}\left(\hat{x} \times \hat{z}\right)\right)$$
$$\Rightarrow\; \vec{F}_c = 2m\omega\left(\dot{y}\hat{z} + \dot{z}\left(-\hat{y}\right)\right) \;\Rightarrow\; \vec{F}_c = -2m\omega\dot{z}\hat{y} + 2m\omega\dot{y}\hat{z}$$

Como en el enunciado nos dicen que esta fuerza (generada por la rotación terrestre) no afecta al movimiento en la dirección perpendicular a la Tierra (en este caso $\hat{z}$), entonces podemos ignorar el segundo término de la expresión anterior, y así:

$$\Rightarrow\; \vec{F}_c = -2m\omega\dot{z}\hat{y}$$

Ahora que tenemos la fuerza asociada a la rotación, y como la única otra fuerza que actúa es el peso $\vec{F}_T$, podemos aplicar la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ para obtener la ecuación de movimiento asociada a cada dirección de movimiento. La segunda ley de Newton nos dice que el resultado de una fuerza neta actuando sobre un cuerpo es una aceleración en una dirección paralela a la que se aplica la fuerza. En ese sentido, las fuerzas aplicadas en distintas direcciones del sistema de referencia hacen que el cuerpo acelere en esas direcciones, y como en este caso sólo tenemos fuerzas en $\hat{z}$ (el peso) y en $\hat{y}$ (fuerza debido a la rotación), entonces no habrá aceleración en $\hat{x}$, con lo cual $\vec{a} = \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$. Entonces, como la fuerza neta es $\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_c$, se tiene que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{F}_T + \vec{F}_c = m\left(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}\right) \;\Rightarrow\; -mg\hat{z} - 2m\omega\dot{z}\hat{y} = m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z}$$

Reordenamos la expresión anterior y separamos en ecuaciones escalares[5], con lo cual se obtiene que:

$$\Rightarrow\; m\ddot{y} = -2m\omega\dot{z} \quad ; \quad m\ddot{z} = -mg$$

$$\Rightarrow\; \ddot{y} = -2\omega\dot{z} \quad ; \quad \ddot{z} = -g \tag{3}$$

Podemos notar que la segunda expresión hace referencia a un MRUA como el de la pregunta 1, con una aceleración $a = -g$. Tomando en cuenta eso, si v_0 es la velocidad vertical inicial de la partícula, y z_0 es su altura inicial, entonces de las expresiones (1) y (2) se tiene que:

$$\dot{z}(t) = v_0 - gt \quad ; \quad z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

Como ahora tenemos explícitamente una expresión para $\dot{z}$ en función del tiempo, podemos reemplazarla en la ecuación de movimiento para la dirección $\hat{y}$ obtenida en la expresión (3), así:

$$\Rightarrow\; \ddot{y} = -2\omega\left(v_0 - gt\right) \;\Rightarrow\; \ddot{y} = 2\omega gt - 2\omega v_0$$

Podemos integrar esta expresión de forma similar a como lo hicimos en la pregunta 1 para obtener $\dot{y}(t)$ y luego $y(t)$. Como el movimiento en esta dirección es una *desviación*, asumimos que en esta ecuación las condiciones iniciales son $\dot{y}(0) = 0$ e $y(0) = 0$, y así:

$$\ddot{y} = 2\omega gt - 2\omega v_0 \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{y}}{dt} = 2\omega gt - 2\omega v_0 \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{d\dot{y}}{dt}dt = \int_0^t 2\omega gtdt - \int_0^t 2\omega v_0 dt$$

[5] Es decir, juntamos las expresiones que en ambos lados de la igualdad acompañan al mismo vector unitario.

$$\Rightarrow \; \dot{y}(t) - \dot{y}(0) = 2\omega g \left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 2\omega v_0 (t-0) \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = \omega g t^2 - 2\omega v_0 t$$

Integramos esta ecuación una vez más con respecto al tiempo para obtener la expresión $y(t)$, entonces:

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^t \omega g t^2 dt - \int_0^t 2\omega v_0 t dt$$

$$y(t) - y(0) = \omega g \left(\frac{t^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) - 2\omega v_0 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \;\Rightarrow\; y(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 - \omega v_0 t^2 \tag{5}$$

Ahora que tenemos $y(t)$ y $z(t)$ podemos ser capaces de encontrar la curva $z(y)$ que modela matemáticamente el lugar geométrico que describe la partícula. Como nos piden el caso de caída libre usamos $v_0 = 0$ en las expresiones (4) y (5), y entonces la trayectoria de la partícula está modelada por las siguientes ecuaciones:

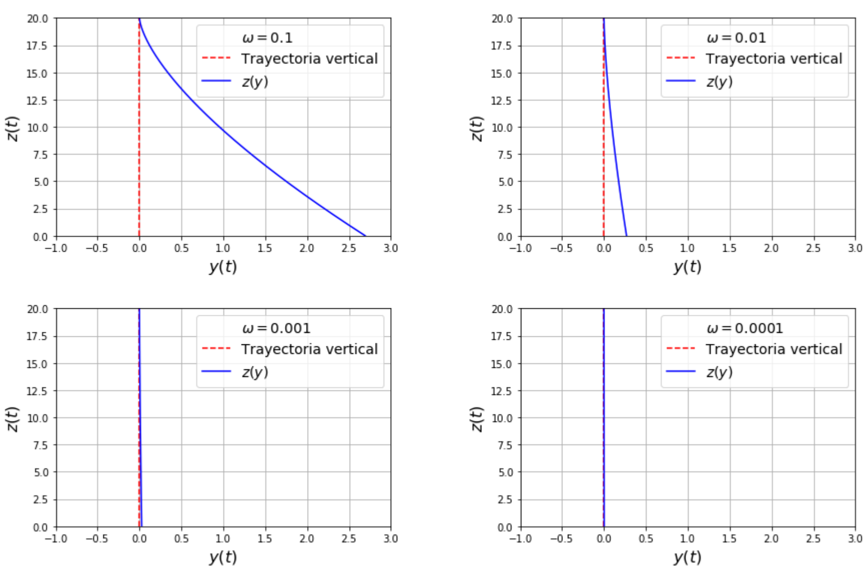
$$y(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \quad ; \quad z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Como queremos una expresión matemática para z en función de y, podemos despejar $t(y)$ a partir de la primera expresión, y luego reemplazar en la segunda expresión. Entonces:

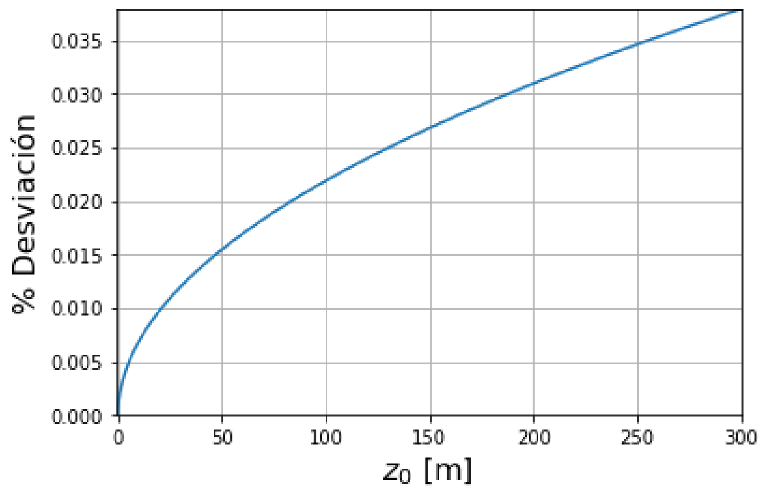
$$y = \frac{1}{3}\omega g t^3 \;\Rightarrow\; t = \left(\frac{3y}{\omega g}\right)^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; z(y) = z_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{3y}{\omega g}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \; z(y) = z_0 - \left(\frac{3\sqrt{g^3} y}{\sqrt{8}\omega g}\right)^{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; \boxed{z(y) = z_0 - \left(\frac{9g}{8\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}}$$

De la expresión para $y(t)$ podemos notar que la desviación lateral es directamente proporcional a la velocidad angular del planeta Tierra, lo cual se muestra en los siguientes gráfico para $z(y)$, donde se puede notar una desviación menos pronunciada para valores pequeños de ω:



Ahora, la velocidad angular asociada a la rotación terrestre es $\omega_T = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, que corresponde a un valor bastante pequeño. Considerando esto, la desviación lateral producida por la rotación de la Tierra puede despreciarse para cualquier altura inicial en el rango que podemos aplicar caída libre cerca de la superficie terrestre. En el siguiente gráfico se muestra el porcentaje de desviación en la trayectoria, el cual se calcula como el cociente entre la desviación lateral total $y(t_f)$ (donde t_f es el tiempo total de la caída) y la altura inicial z_0:



Podemos ver que para alturas incluso del orden del Costanera Center ($z_0 = 300$ m) el porcentaje de desviación es minúsculo, lo cual permite aproximar todas las trayectorias de caída libre cerca de la superficie terrestre a líneas rectas.