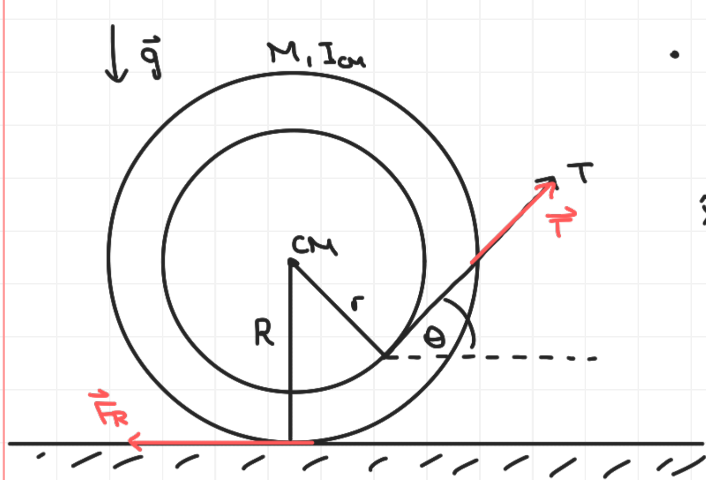
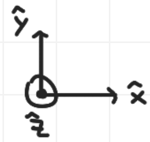
P1





• θ_c?

$I_{CM} < MR^2$

Del enunciado, el carrete rueda, lo que es posible solo si existe fza de roce con el suelo que se oponga al deslizamiento. Luego, tenemos 2 fuerzas presentes: la tensión del hilo y la fuerza de roce, por lo que la segunda ley de Newton sobre el CM del carrete entrega:

$$M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F} = \vec{F}_R + \vec{T} \qquad (1)$$

Nos interesa conocer su movimiento en el eje x, pues el ángulo crítico que nos piden indica hacia dónde rueda en ese eje. Proyectando (1) en $\hat{x}$:

$$M\vec{a}_{CM}\cdot\hat{x} = \vec{F}_R\cdot\hat{x} + \vec{T}\cdot\hat{x}$$

$$\vec{F}_R = -F_R\hat{x}$$
$$\vec{T} = T(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

$$M\ddot{x}_{CM} = T\cos\theta - F_R \qquad (2)$$

De esta ecuación podríamos conocer la condición sobre θ para los diferentes signos de $\ddot{x}_{CM}$ (que indicarían mov. hacia la izq. o derecha), pero no conocemos cómo es F_R, y para poder determinarlo necesitamos otra ecuación.

La ecuación que permite determinar F_R es la que se tiene para el torque:

$$I_{CM}\vec{\alpha} = \sum \vec{\tau} = \underbrace{\vec{r}_T \times \vec{T}}_{\circlearrowleft} + \underbrace{\vec{r}_{F_R} \times \vec{F}_R}_{\circlearrowright} \quad \Big/ \cdot \hat{z}$$

$\vec{r}_T \perp \vec{T}$ y $\vec{r}_{F_R} \perp \vec{F}_R$
↳ los torques solo están en la dirección perp. al plano del dibujo

$$I_{CM}\ddot{\theta} = rT - RF_R \qquad (3)$$

Ahora conocemos F_R, pero aparece la aceleración angular. Como el carrete rueda sin resbalar, se cumple $\ddot{x}_{CM} = R\ddot{\theta}$ $(x = R\theta)$, con lo cual, despejando F_R de (3),

$$RF_R = rT - I_{CM}\ddot{\theta} = rT - \frac{I_{CM}}{R}\ddot{x}_{CM} \qquad (4)$$

y reemplazando (4) en (2),

$$M\ddot{x}_{cm} = T\cos\theta - \frac{1}{R}\left(rT - \frac{I_{cm}}{R}\ddot{x}_{cm}\right)$$

$$\left(M - \frac{I_{cm}}{R^2}\right)\ddot{x}_{cm} = T\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)$$

Con esto el signo de $\ddot{x}_{cm}$, y por lo tanto la dirección del movimiento, dependen del signo de $\cos\theta - r/R$

mov. nacia la derecha $\longrightarrow \ddot{x}_{cm} > 0 \longrightarrow \cos\theta > \frac{r}{R}$

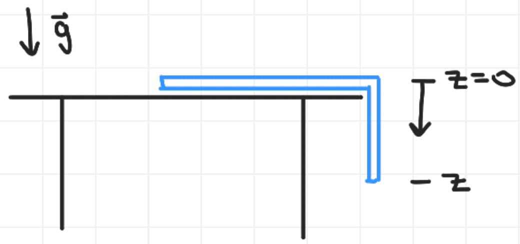
mov. nacia la izquierda $\longrightarrow \ddot{x}_{cm} < 0 \longrightarrow \cos\theta < \frac{r}{R}$

Finalmente, el ángulo crítico está dado por $\ddot{x}_{cm} = 0$, es decir,

$$\cos\theta_c = \frac{r}{R}$$

$$\boxed{\theta_c = \arccos\frac{r}{R}}$$

E



- masa M, largo L
- la cuerda tarda τ en caer completamente

Para encontrar lo que se pide se puede usar conservación de energía, y para esto se necesitan expresiones para la energía cinética y potencial.

La cuerda (ideal) es un sistema continuo, pero puede pensarse como un sistema de $N \gg 1$ partículas (constituyentes de la cuerda). También, como es inextensible, cada constituyente de la cuerda debe moverse con la misma rapidez: v_0 hasta antes de comenzar a caer y $\dot{z}$ cuando está cayendo. Luego,

$$\left.\begin{aligned} K_{inicial} &= \sum_{i=1}^{N} K_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_0^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{\text{masa cuerda}} = \frac{1}{2} M v_0^2 \\ K_{final} &= \frac{1}{2} M \dot{z}^2 \quad \longrightarrow \quad \text{mismo razonamiento} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Por otro lado, el cálculo de la energía potencial debe dividirse entre las partes sobre la mesa y la parte que está cayendo. La única contribución a la potencial es la gravitatoria, e inicialmente está completamente sobre la mesa. Además, se define $z=0$ a la altura de la mesa, por lo que

$$U_{inicial} = 0 \qquad (2)$$

$$U_{final} = -\sum_{i=1}^{N} m_i g z_i = -g \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \qquad (3)$$

Como la cuerda tiene densidad conocida $\lambda = M/L$, y es uniforme, cada constituyente se puede pensar como una pequeña cuerda de largo Δz_i y masa m_i tal que $\lambda = m_i/\Delta z_i$. Luego, con el valor λ conocido, $m_i = M\Delta z_i/L$. Con esto, (3) se anota

$$U_{final} = -g \sum_{i=1}^{N} \frac{M}{L} z_i \Delta z_i = -\frac{Mg}{L} \sum_{i=1}^{N} z_i \Delta z_i$$

Ahora, como $N \gg 1$, se puede aproximar la suma a una integral, pero solo nos interesan los constituyentes que están ya en caída, pues el resto tienen $z_i = 0$. Sigue que

$$U_{final} = -\frac{Mg}{L} \int_0^z z'\, dz' = -\frac{Mgz^2}{2L} \qquad (4)$$

Juntando (1), (2) y (4), la conservación de energía permite escribir que

$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}v_0^2 + 0 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}\dot{z}^2 - \frac{\cancel{M}gz^2}{\cancel{2}L}$$

$$\dot{z}^2 = v_0^2 + \frac{g}{L}z^2$$

$$\dot{z} = \sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2} \qquad (5)$$

Sabemos que la cuerda tarda un tiempo τ en caer completamente, luego

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2}}\frac{dz}{dt} = 1 \qquad \Big/ \int_0^\tau dt$$

$$\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2}}\underbrace{\frac{dz}{dt}dt}_{dz} = \underbrace{\int_0^\tau dt}_{\tau} \qquad \Big/ \int_0^\tau dt \rightarrow \int_0^L dz$$

$$\int_0^L \frac{dz}{v_0\sqrt{1 + \frac{g}{v_0^2L}z^2}} = \tau \qquad \Big/ \tan\theta = \sqrt{\frac{g}{v_0^2L}}\,z$$

$$dz = \sqrt{\frac{v_0^2L}{g}}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\theta(L)} \sqrt{\frac{v_0^2L}{g}}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\, d\theta = v_0\tau \qquad \Big/ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\int_0^{\theta(L)} \sec\theta\, d\theta = \sqrt{\frac{g}{\cancel{v_0^2}L}}\,\cancel{v_0}\tau = \tau\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\ln(\sec\theta(L) + \tan\theta(L)) - \cancel{\ln 1}^{\,0} = \tau\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\sec\theta(L) + \tan\theta(L) = e^{\tau\sqrt{g/L}} \qquad \Big/ \theta = \arctan\left(\sqrt{\frac{g}{v_0^2L}}\,z\right)$$

$$\sec\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{g}{v_0^2L}}\,L\right)\right) + \sqrt{\frac{g}{v_0^2L}}\,L = e^{\tau\sqrt{g/L}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{g}{v_0^2L}L^2} + \sqrt{\frac{gL}{v_0^2}} = e^{\tau\sqrt{g/L}}$$

$$\sqrt{v_0^2 + gL} + \sqrt{gL} = v_0 e^{\tau\sqrt{g/L}}$$

$$v_0^2 + \cancel{gL} = v_0^2 e^{2\tau\sqrt{g/L}} + \cancel{gL} - 2v_0 e^{\tau\sqrt{g/L}}\sqrt{gL}$$

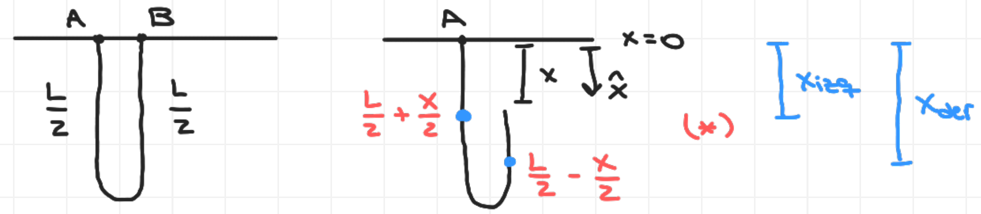
$$v_0^{\cancel{2}}\left(1 - e^{2\tau\sqrt{g/L}}\right) = -2\cancel{v_0} e^{\tau\sqrt{g/L}}\sqrt{gL}$$

$$v_0 = \frac{2e^{\tau\sqrt{g/L}}\sqrt{gL}}{e^{2\tau\sqrt{g/L}} - 1}$$

$$v_0 = \frac{2\sqrt{gL}}{e^{\tau\sqrt{g/L}} - e^{-\tau\sqrt{g/L}}}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{\sqrt{gL}}{\sinh\left(\tau\sqrt{g/L}\right)}}$$

P2



a) Al soltarse de B, se distribuye la distancia que cae (x) entre los dos lados de la cuerda (*). La masa del lado izquierdo de la cuerda es

$$M_{izq} = \lambda\left(\frac{L}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{M}{2L}(L+x)$$

y para el lado derecho,

$$M_{der} = \lambda\left(\frac{L}{2}-\frac{x}{2}\right) = \frac{M}{2L}(L-x)$$

Luego, como la masa se distribuye homogéneamente, el centro de masas de cada porción es el punto medio de estas, con lo que el centro de masas del sistema es

$$x_{cm} = \frac{M_{izq}\,x_{izq} + M_{der}\,x_{der}}{M}$$

$$x_{izq} = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L}{2}+\frac{x}{2}\right)}^{\text{punto medio}} = \frac{1}{4}(L+x)$$

$$x_{der} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}-\frac{x}{2}\right)}_{\text{punto medio}} + x = \frac{1}{4}(L-x)+x = \frac{1}{4}(L+3x)$$

$$x_{cm} = \frac{1}{\cancel{M}}\left[\frac{\cancel{M}}{2L}(L+x)\cdot\frac{1}{4}(L+x) + \frac{\cancel{M}}{2L}(L-x)\cdot\frac{1}{4}(L+3x)\right]$$

$$= \frac{1}{8L}\left[(L+x)^2 + L^2 + 2Lx - 3x^2\right]$$

$$= \frac{1}{8L}\left(2L^2 + 4Lx - 2x^2\right)$$

$$\boxed{x_{cm} = \frac{1}{4L}\left(L^2 + 2Lx - x^2\right)}$$

b) El momentum lineal del centro de masas será simplemente

$$p_{cm} = M\dot{x}_{cm}$$

$$= \frac{M}{4L}\left(2L\dot{x} - 2x\dot{x}\right) \qquad / \; x = x_{cm} \text{ para simplificar notación}$$

$$p_{cm} = \frac{M}{2L}(L - x)\dot{x}$$

Luego, la ecuación de movimiento será

$$\dot{p}_{cm} = \sum F = Mg - T$$

$$\boxed{\frac{M}{2L}\left[-\dot{x}^2 + (L-x)\ddot{x}\right] = Mg - T} \qquad (1)$$

c) En caída libre, $\ddot{x} = g$, $\dot{x}_0 = 0$ y $x_0 = 0$ (reposo en B), por lo que

$$\dot{x} = gt \qquad x = \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

$$\dot{x} = \sqrt{2gx}$$

Luego, la tensión en función de x se calcula reemplazando esto en (1)

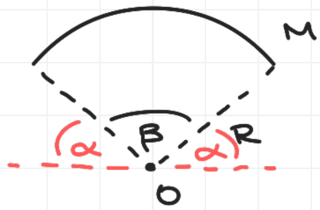
$$\frac{M}{2L}\left[-2gx + (L-x)g\right] = Mg - T$$

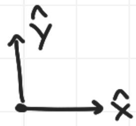
$$\frac{M}{2L}\left(gL - 3gx\right) = Mg - T$$

$$T = Mg\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{3x}{2L}\right)$$

$$\boxed{T(x) = \frac{1}{2}Mg\left(1 + \frac{3x}{L}\right)}$$

P3





Para encontrar el CM, notamos que en coords. cilíndricos cada punto del arco se describe como

$$\vec{r} = R\hat{r} \longrightarrow \text{no permite diferenciar 2 puntos} \neq \text{del arco}$$

y, si parametrizamos en coords. cartesianas según un ángulo θ que recorre al arco, entonces

$$\vec{r} = R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y} \qquad (1)$$

La fórmula para el CM para $N \gg 1$ partículas es

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \qquad (2)$$

por lo que falta determinar dm (la masa de cada "partícula" o constituyente).

El arco tiene densidad uniforme $\lambda = M/L$ con L el largo del arco, que al ser circunferencial, se cumple $L = R\beta$. Como la densidad es uniforme, cada constituyente de masa dm tiene la misma densidad λ, y estos constituyentes miden c/u $dl = R\, d\theta$ según nuestro parámetro θ de parametrización, por lo que

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \longrightarrow dm = \lambda\, dl = \frac{M}{R\beta}\cdot R\, d\theta = \frac{M\, d\theta}{\beta} \qquad (3)$$

Ahora podemos reemplazar en (2) y usar (1):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\cancel{M}}\int (R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y})\cdot \frac{\cancel{M}\, d\theta}{\beta}$$

$$= \frac{R}{\beta}\left[\hat{x}\int \cos\theta\, d\theta + \hat{y}\int \sin\theta\, d\theta\right] \qquad (4)$$

Los límites de integración serán, según el dibujo, α y $\alpha+\beta$, donde α cumple que

$$2\alpha + \beta = \pi \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \beta) \qquad \alpha + \beta = \frac{1}{2}(\pi + \beta)$$

Con esto, el CM (4) se calcula como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{R}{\beta}\left[\hat{x}\cancel{\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}\cos\theta\, d\theta}^{\,0} + \hat{y}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}\sin\theta\, d\theta\right]$$

$$= \hat{y}\,\frac{R}{\beta}\left[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$= \hat{y}\,\frac{R}{\beta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \hat{y}\,\frac{R}{\beta}\left[\sin\frac{\beta}{2} - \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{2R}{\beta}\sin\frac{\beta}{2}\;\hat{y}}$$

$\beta \in [0, 2\pi)$