Resumen:

Problema de valores y vectores propio

$$\boxed{Ax = \lambda X}$$

→ sol. trivial: $(x=0)$
es cuando $\lambda=0$

Para soluciones distintas

$$Ax = \lambda x \rightarrow \underline{(A - \underbrace{I}_{\text{matriz identidad}} \cdot \lambda)\, x = 0}$$

En física λ = frecuencia de oscilación en problemas de oscilaciones acopladas.

v = relación de amplitudes.

$\vec{X}$ que cumplen esto son vectores propios

λ que cumplen son valores propios

Para determinar λ → $\det(A - I\lambda) = 0$

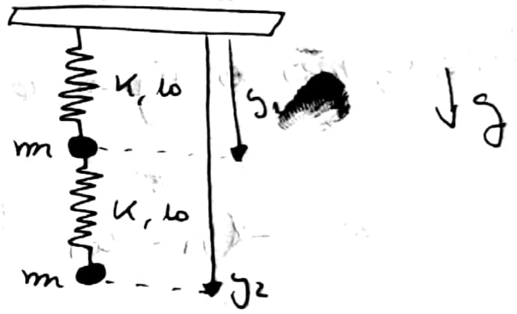
Para determinar vectores propios: $(A - I\lambda) \cdot v = 0$

v que cumplan → vectores propios!

Pauta Aux 13

P1)

Dibujemos el problema:



a) Queremos encontrar y_1^*, y_2^* posiciones de m_1, m_2 para lograr el equilibrio. (equilibrio se impone con $\ddot{y}_1 = 0$, $\ddot{y}_2 = 0$)

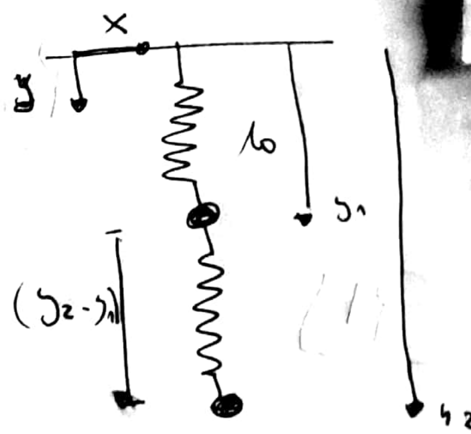
$\longrightarrow$ debemos hacer DCL y $\sum F = ma$

masa 1:

masa 2:

(F_{e2} es la fuerza del 2do resorte, esta DEBE tener signos contrarios en m_1, m_2, ya que si se contrae a una la sube y otra la baja, y si se expande lo mismo)

Para la 1era masa:



$$\boxed{m\ddot{y}_1 = mg - k(y_1 - l_0) + k((y_2 - y_1) - l_0)}$$

Analizemos los signos de los resortes:

$-k(y_1 - l_0)$ { cuando $y_1 > l_0$ debería querer achicarse y tirarla a m hacia arriba, y en este caso arriba es negativo $\rightarrow -k(y_1 - l_0)$ ✓

$k((y_2 - y_1) - l_0)$ { cuando $(y_2 - y_1) > l_0$ debiera achicarse y tirarla hacia abajo, abajo es positivo y $k(y_2 - y_1 - l_0)$ sería positivo ✓

Para 2da masa:

$$\boxed{m\ddot{y}_2 = mg - k(y_2 - y_1 - l_0)}$$

Buscamos los equilibrios: $\ddot{y}_1 = 0 = \ddot{y}_2$

$$\longrightarrow \quad 0 = mg - k(y_1^* - l_0) + k(y_2^* - y_1^* - l_0) \quad (1)$$

$$\longrightarrow \quad 0 = mg - k(y_2^* - y_1^* - l_0) \quad (2)$$

(1)+(2)

$$0 = 2mg - k(y_1^* - l_0)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y_1^* = \frac{2mg}{k} + l_0}$$

Usando esto en (2)

$$0 = mg - k\left(y_2^* - 2mg/k - \overset{2l_0}{\cancel{l_0} - \cancel{l_0}}\right)$$

$$0 = mg - ky_2^* + 2mg - k2l_0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y_2^* = \frac{3mg}{k} + 2l_0}$$

b) Nos piden hacer el cambio de variable:

$$\ddot{\delta}_1 = \ddot{y}_1 \quad \left| \quad \delta_1 = y_1 - y_1^* \right.$$

$$\ddot{\delta}_2 = \ddot{y}_2 \quad \left| \quad \delta_2 = y_2 - y_2^* \right.$$

$$m\ddot{y}_1 = mg - k(y_1 - l_0) + k(y_2 - y_1 - l_0)$$

$$m\ddot{\delta}_1 = mg - k(y_1 - l_0 + y_1^* - y_1^*) + k(y_2 - y_1 - l_0 + y_1^* - y_1^* + y_2^* - y_2^*)$$

$$m\ddot{\delta}_1 = mg - k((y_1 - y_1^*) - l_0 + y_1^*) + k((y_2 - y_2^*) - (y_1 - y_1^*) - l_0 + y_2^* - y_1^*)$$

$$m\ddot{\delta}_1 = mg - k\left(\delta_1 - l_0 + l_0 + \frac{2mg}{k}\right) + k\left(\delta_2 - \delta_1 - l_0 + 2l_0 + \frac{3mg}{k} - l_0 - \frac{2mg}{k}\right)$$

$$m\ddot{\delta}_1 = mg - k\left(\delta_1 + \frac{2mg}{k}\right) + k\left(\delta_2 - \delta_1 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$\boxed{m\ddot{\delta}_1 = -k\delta_1 + k(\delta_2 - k_1)}$$

haciendo lo mismo en $\ddot{y}_2 \longrightarrow \boxed{m\ddot{\delta}_2 = -k(\delta_1 - \delta_2)}$

Escaneado con CamScanner

Tenemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} \cancel{m}\ddot{\delta}_1 &= -\frac{k}{m}\delta_1 + \frac{k}{m}(\delta_2 - \delta_1) \\ \cancel{m}\ddot{\delta}_2 &= -\frac{k}{m}(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned}}$$

Sistema Acoplado!

matricialmente:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}}$$

c) Asumiendo $\delta_i = A_i \operatorname{sen}\omega t + B_i \cos\omega t$ queremos encontrar frecuencias de oscilación.

$\longrightarrow$ $\delta_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$

$\ddot{\delta}_1 = -\omega^2(A_1 \operatorname{sen}(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$

$\boxed{\ddot{\delta}_1 = -\omega^2 \delta_1}$

lo mismo $\ddot{\delta}_2 = -\omega^2 \delta_2$

queda matricialmente

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \delta_1 \\ -\omega^2 \delta_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{-k}{m}}_{=\omega_0^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{-\omega^2 \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Para ver que valor de ω solucionan el problema de manera no trivial $\rightarrow$ det( ) = 0

$$\rightarrow (2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - (-\omega_0^2 \cdot -\omega_0^2) = 0$$

$$2\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 - \omega^2\omega_0^2 + \omega^4 - \omega_0^4 = 0$$

$$\omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{+3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9-4}\,\omega_0^2}{2}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,\omega_0^2}$$

$\rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,\omega_0^2$

$\rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,\omega_0^2$

} Valores propios del problema.

tiene 2 frecuencias de oscilación!

d) Encontrar relación entre amplitudes de oscilación para las 2 frecuencias que encontramos.

Para ello $\rightarrow$ encontrar vectores propios

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

evaluamos en $\omega^2 = \left(3 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\omega_0^2$

Escaneado con CamScanner

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \delta_1 \cdot \cancel{\omega_0^2}\left(2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \delta_2 \cancel{\omega_0^2} = 0$$

$$\delta_2 = \delta_1 \left(2 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta_2 = \delta_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Vector propio de ese modo: $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

Relación ~~A, B~~ Amplitudes

partícula 1, 2

en este modo la amplitud de 1 es mayor!

Para $\omega^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0^2$

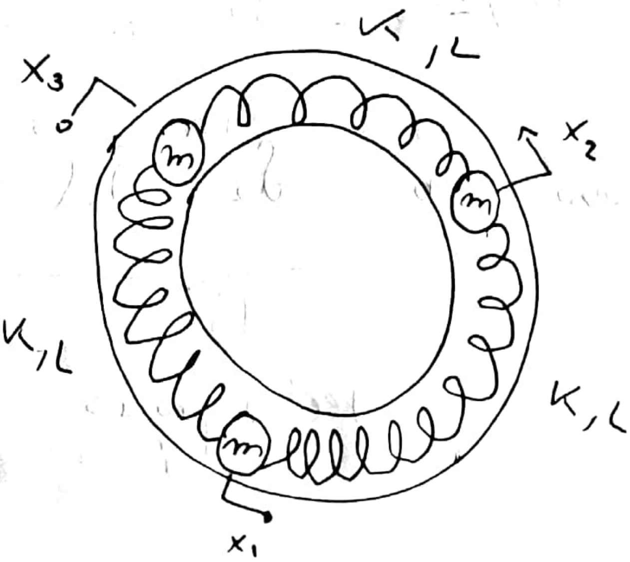
mismo proceso $\longrightarrow$ $\underbrace{\delta_2 = \delta_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

Vector propio : $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner

P3)

Tenemos:



en x_i ya está metido elongación!

a) Escribir ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_3) + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) + k(x_1 - x_3)$$

matricial:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{-\omega_0^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) Queremos frecuencias de oscilación

$$\longrightarrow \quad \ddot{X}_1 = -\omega^2 X_1$$
$$\ddot{X}_2 = -\omega^2 X_2$$
$$\ddot{X}_3 = -\omega^2 X_3$$

Asumimos mov. oscilatorio

$$\underbrace{-\omega^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$$

Encontramos unos ω que cumplan con $\det(\quad) = 0$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \left((2\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4\right)$$
$$+$$
$$\omega_0^2 \left(\left(-\omega_0^2 \cdot (2\omega_0^2 - \omega^2)\right) - \omega_0^4\right) \qquad = 0$$
$$\omega_0^2 \left(-\omega_0^4 \overset{+}{-} \left(-\omega_0^2 \cdot (2\omega_0^2 - \omega^2)\right)\right)$$

$$(2\omega_0^2-\omega^2)^3 - (2\omega_0^2-\omega^2)\,\omega_0^4 + - \omega_0^4(2\omega_0^2-\omega^2) - \omega_0^6$$

$$-\omega_0^6 - \omega_0^4(2\omega_0^2-\omega^2) = 0$$

$$(2\omega_0^2-\omega^2)^3 - 3\omega_0^4(2\omega_0^2-\omega^2) - 2\omega_0^6 = 0$$

$$\cancel{8\omega_0^6 - 12\omega_0^4\omega^2 + 6\omega_0^2\omega^4 - \omega^6 - 6\omega_0^6}$$

$$8\cancel{\omega_0^6} - 3\cdot 2^2\omega_0^4\omega^2 + 3\cdot 2\omega_0^2\cdot\omega^4 - \omega^6 - 6\cancel{\omega_0^6} + 3\omega_0^4\omega^2 - 2\cancel{\omega_0^6} = 0$$

$$-\omega^6 + 6\omega_0^2\omega^4 - 9\omega_0^4\omega^2 = 0$$

$$\omega^6 - 6\omega_0^2\omega^4 + 9\omega_0^4\omega^2 = 0$$

$$\omega^2(\omega^4 - 6\omega_0^2\omega^2 + 9\omega_0^4) = 0$$

$$\omega^2(\omega^2 - 3\omega_0^2)^2 = 0$$

$$\boxed{\omega = \begin{matrix} 0 \\ 3\omega_0^2 \end{matrix}}$$

Tenemos solo 2 frecuencias!

c) Queremos la moda

↓

Vectores propios:

Para $\omega^2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - 0 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - 0 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

② $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

③ $-x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

~~Sumamos todas~~:

$(\cancel{x_1 + x_2} + x_3) = 0$

$\rightarrow \cancel{x_1} = -(x_2 + x_3)$

① + 2② $= 2\cancel{x_1} - x_2 - x_3 - 2\cancel{x_1} + 4x_2 - 2x_3 = 0$

$\boxed{x_2 = x_3}$

Usamos esto en ① $2x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

$\Longrightarrow X_1 = X_2 = X_3$ { vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

este mov es con $\omega^2 = 0$ es decir no oscila, solamente se mueven con misma rapidez los 3.

Ahora con $\omega_0^2 = 3\omega_0^2$

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0 - 3\omega_0^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - 3\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - 3\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 incognitas $\underbrace{\text{3 ecuaciones iguales}}_{=}$

1 sola ecuacion

$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Longrightarrow X_1 = -(X_2 + X_3)$

$\longrightarrow$ vectores propios : $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ Tenemos 2 mov

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ se queda quieto X_3 y se mueven en sentidos contrarios X_1, X_2

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ se queda en reposo X_2, y se mueven X_1, X_3.