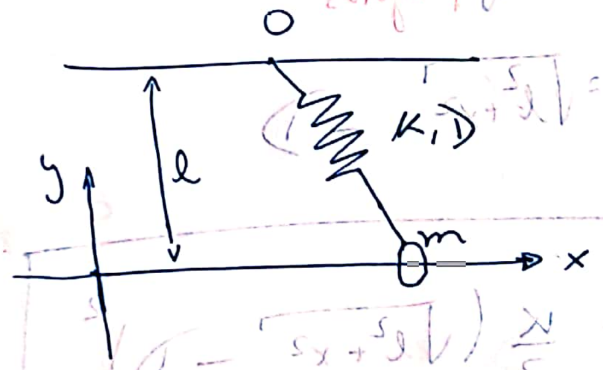
Pauta aux 10

P1)

Tenemos una varilla por la cual una argolla se desliza sin roce. Esta argolla se encuentra además unida a un resorte:



a) Queremos encontrar $U(x)$ de la argolla m:

Notemos que a la argolla le afectan 2 potenciales:

$$U_g = mgy \quad \text{(potencial gravitatorio)}$$

$$U_e = \frac{K}{2}(\text{elongación})^2 \quad \text{(potencial elástico)}$$

El primero es 0 ni tomamos que se mueve en $y=0$ (solo se mueve en x)

Para el segundo hay que calcular la elongación del resorte:

elongación = largo − largo natural

= largo − D

$\downarrow$ pitagoras

$= \sqrt{l^2+x^2} - D$

$$\longrightarrow \boxed{U(x) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2+x^2} - D\right)^2}$$

b) Ahora queremos determinar los puntos de equilibrio del sistema:

imponemos: $\longrightarrow$ $U'(x_{eq}) = 0$

$$U'(x) = \frac{k}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left(\sqrt{l^2+x^2} - D\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{l^2+x^2}} \cdot \cancel{2}x$$

$$U'(x) = \frac{K\left(\sqrt{l^2+x^2} - D\right)\cdot x}{\sqrt{l^2+x^2}}$$

igualando a 0 :

$$\frac{K\left(\sqrt{l^2+x_{eq}^2} - D\right)\cdot x_{eq}}{\sqrt{l^2+x_{eq}^2}} = 0$$

2 opciones: $x_{eq} = 0$

$$\sqrt{l^2+x_{eq}^2} - D = 0 \Longrightarrow x_{eq} = \pm\sqrt{D^2-l^2}$$

Tenemos 3 equilibrios: $x_{eq}\begin{cases} 0 \\ \sqrt{D^2-l^2} \\ -\sqrt{D^2-l^2}\end{cases}$

Para ver estabilidad $U''(x_{eq}) > 0$ estable notemos antes que $U'(x) = Kx - \dfrac{KDx}{\sqrt{l^2+x^2}}$

ahora:

$$U''(x) = K - KD \cdot \frac{\left(\sqrt{l^2+x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{l^2+x^2}} \cdot 2x\right)}{l^2+x^2}$$

$$= K - KD \left(\frac{\sqrt{l^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{l^2+x^2}}}{l^2+x^2} \right)$$

$$= K - \frac{KD}{\sqrt{l^2+x^2}} + \frac{KDx^2}{(l^2+x^2)^{3/2}}$$

evaluamos en nuestros puntos de equilibrio:

$x_{eq} = 0$:

$$U''(x_{eq}=0) = K - \frac{KD}{l} = K\left(1 - \frac{D}{l}\right)$$

es estable si $l > D$

Escaneado con CamScanner

$$X_{eq} = \sqrt{D^2 - l^2} :$$

$$U''\left(x_{eq} = \sqrt{D^2-l^2}\right) = K - \frac{KD}{\sqrt{l^2+D^2-l^2}} + \frac{KD(D^2-l^2)}{(l^2+D^2-l^2)^{3/2}}$$

$$= K - \frac{K\cancel{D}}{\cancel{D}} + \frac{KD(D^2-l^2)}{D^3}$$

$$= \frac{KD(D^2-l^2)}{D^3}$$

estable si $D > l$

exactamente lo mismo por $x_{eq} = -\sqrt{D^2-l^2}$ (ya que solo hay x^2)

obtengamos $\omega_{p.o}$:

Si uno puede escribir la energía como:

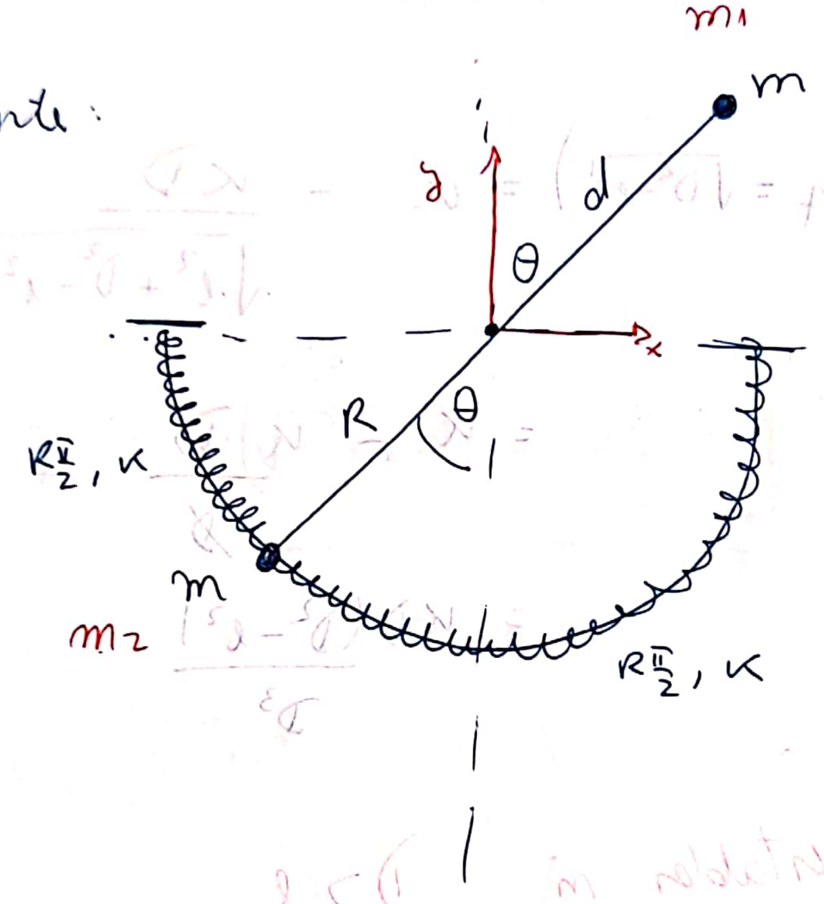
$$E = \frac{\alpha \dot{x}^2}{2} + U(x) \longrightarrow \omega^2 = \frac{U''(x_{eq})}{\alpha}$$

$\rightarrow$ para $X_{eq} = 0$ $\rightarrow$ $\omega^2 = \frac{1}{m}\left(K\left(1 - \frac{D}{l}\right)\right)$

para $x_{eq} = \pm\sqrt{D^2-l^2}$ $\quad \omega^2 = \frac{1}{m}\left(KD\frac{(D^2-l^2)}{D^3}\right)$

P2)

Tenemos lo siguiente:



a) Queremos ver para que valores de d, el angulo $\theta=0$ es un equilibrio estable.

Para ello obtengamos la energía potencial $U(\theta)$

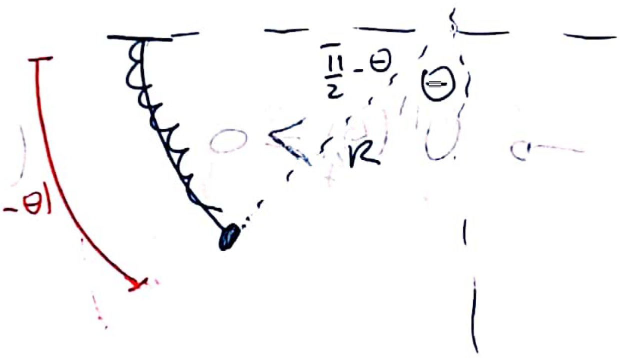
$$\rightarrow U_g(\theta) = \overbrace{mg\, d \cos\theta}^{m_1} + \overbrace{mg(-R)\cos\theta}^{m_2}$$

$$= mg\cos\theta\,(d-R)$$

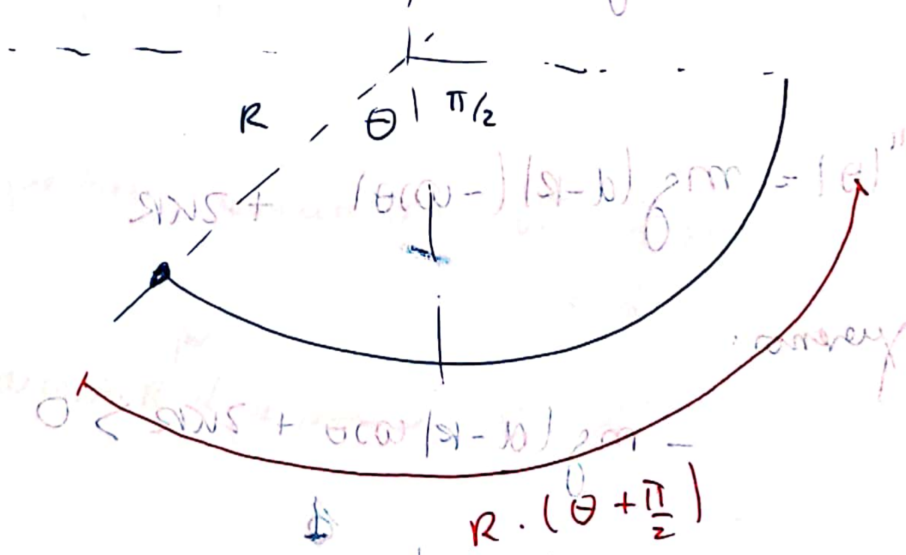
Escaneado con CamScanner

$$y \quad U_e(\theta) = \frac{k}{2}\left(\text{largo resorte 1} - R\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\text{largo resorte 2} - R\frac{\pi}{2}\right)^2$$

largo resorte 1:



largo resorte 2:



$$\rightarrow U_e(\theta) = \frac{k}{2}\left(R\frac{\pi}{2} - R\theta - R\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(R\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) - R\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \frac{k}{2}(R\theta)^2 + \frac{k}{2}(R\theta)^2$$

$$\boxed{U_e(\theta) = k R^2 \theta^2}$$

luego potencial total:

$$U(\theta) = mg\cos\theta(d-R) + KR^2\theta^2$$

buscamos equilibrio estable $\longrightarrow U''(\theta_q) > 0$

por enunciado $(\theta_q = 0)$

$$U'(\theta) = mg(d-R)(-\sin\theta) + 2KR\theta$$

$$U''(\theta) = mg(d-R)(-\cos\theta) + 2KR$$

queremos:

$$-mg(d-R)\cos\theta + 2KR > 0 \quad , \theta = 0$$

$$-mg(d-R)\overset{1}{\cancel{\cos\theta}} + 2KR > 0$$

$$-mgd + mgR + 2KR > 0$$

$$mgR + 2KR > mgd$$

$$\boxed{R + \frac{2KR}{mg} > d}$$

estos valores cumplen con $\theta = 0$ estable!

para encontrar ω^2 : si expresamos

$$E = \frac{\alpha \dot{x}^2}{2} + U(x)$$

$$\longrightarrow \omega^2 = \frac{U''(x_{eq})}{\alpha}$$

en caso contrario : hay que encontrar

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

En este caso se puede de ambas! Veamos la 2ª forma.

$$E = \frac{m}{2} V_1^2 + \frac{m}{2} V_2^2 + mg\cos\theta(d-R) + KR^2\theta^2$$

como es un circulo lo que hace, de radio d : $V_1 = d\dot{\theta}_1 = d\dot{\theta}$

lo mismo : es un circulo de radio R el que se mueve por $V_2 = R\dot{\theta}_2 = R\dot{\theta}$

$$\rightarrow E = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} d^2 \dot{\theta}^2 + mg\cos(d-R) + KR^2\theta^2$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2} \dot{\theta}^2 (R^2 + d^2) + mg\cos\theta\,(d-R) + KR^2\theta^2}$$

para encontrar lo que queremos haremos un taylor entorno al punto de equilibrio (aprox de peq oscilaciones)

→ como estamos en energía, y no en fuerzas, los Taylor son a 2 orden! (si tienen dudas con eso pregunten por favor)

En taylor a 2 orden:

	1er orden	3er orden
$\operatorname{Sen}\theta = \theta$	$\operatorname{Sen}\theta = \theta$	$\operatorname{Sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!}$
$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$	$\cos\theta = 1$	$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

→ cuando estam en ecuaciones tipo $F = ma$ Taylor 1er orden

cuando estam en ecuaciones $E = $ algo

(Taylor 2do orden. ya que uno deriva 1 vez más!

con esto queda:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2(R^2 + d^2) + mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)(d-R) + KR\theta^2$$

Buscamos algo tipo $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ → derivamos: $\frac{d}{dt}$

$$\frac{dE}{dt} =$$

$$0 = \frac{m}{2}(R^2 + d^2)\cdot 2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + mg(d-R)\cdot\frac{2\theta}{2}\cancel{\dot{\theta}} + 2KR\theta\cancel{\dot{\theta}}$$

$$0 = \frac{m}{\cancel{2}}(R^2+d^2)\ddot{\theta} + mg(d-R)\theta + 2KR\theta$$

$$\ddot{\theta}\, m(R^2+d^2) = -\left(mg(d-R) + 2KR\right)\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\underbrace{\frac{(mg(d-R) + 2KR)}{m(R^2+d^2)}}_{\omega^2}\theta$$

P3)

Nos dicen que $U(r) = E_0 \ln(r/r_0)$ $\qquad E_0, r_0 > 0$

a) Encontrar radio r_c el cual tiene momento angular l:

recordemos que $\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$ coordenadas polares, pero en ~~movimiento~~ ~~circular~~

$$l = mrv$$

$$\boxed{l = mr^2\dot{\phi}} \longrightarrow \text{debemos encontrar } \dot{\phi} \text{ cuando se mueve con radio } r_c$$

$\longrightarrow$ como $U(r) = E_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ es Fuerza central

$$-\frac{dU}{dr} = F = -\frac{E_0 r_0}{r} \cdot \frac{1}{r_0}$$

$$-\frac{dU}{dr} = -\frac{E_0}{r} = F$$

Como en un movimiento en círculo:

En polares: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$

→ Fuerza central → va en $\hat{r}$

→ $F = ma$

$$-\frac{E_0}{r}\hat{r} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

Además $r = r_c \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\underbrace{-\frac{E_0}{r_c}\hat{r} = (-r_c\dot{\phi}^2)m\hat{r}}_{\text{en } \hat{r}} + mr\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\frac{E_0}{r_c} = r_c\dot{\phi}^2 m \rightarrow \boxed{\dot{\phi}^2 = \frac{E_0}{mr_c^2}} \rightarrow \dot{\phi} \text{ en } r_c$$

en $\hat{\phi}$

Luego usamos $l = mr^2\dot{\phi}$

$$l = mr_c^2 \cdot \sqrt{\frac{E_0}{mr_c}}$$

$$l = \frac{mr_c^{\cancel{2}}}{\cancel{r_c}}\sqrt{\frac{E_0}{m}} \rightarrow \boxed{r_c = \frac{l}{\sqrt{E_0 m}}}$$

b) queremos encontrar ω_{p-o} dado que el mov es entorno a r_c.

Escribamos la energía:

$$E = \frac{m}{2}(v)^2 + U(r)$$

$$= \frac{m}{2}\underbrace{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)}_{\text{(velocidad)}^2 \text{ en polares}} + E_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

como $\ell^2 = m^2 r^4 \dot{\phi}^2 \rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{\ell^2}{m^2 r^4}$

luego

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \cdot \frac{\ell^2}{m^2 r^4} + E_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + E_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}_{U_{eff}(r)}$$

Queda

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r)$$

es del tipo $E = \frac{\alpha}{2}\dot{r}^2 + U(r) \longrightarrow \omega^2_{p.o} = \frac{U''(r_{eq})}{\alpha}$

en este caso $r_{eq} = r_c$

$$\longrightarrow \omega^2_{p.o.} = \frac{U''_{eff}(r_c)}{m}$$

$$U''_{eff} = \frac{-E_0}{r^2} + \frac{3\ell^2}{mr^4}$$

$$U''_{eff}(r_c) = \frac{2m E_0^2}{\ell^2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{2 E_0^3}{\ell^2}}$$