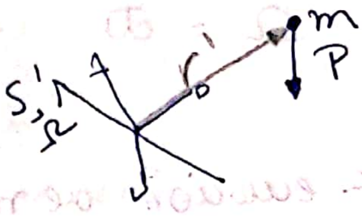
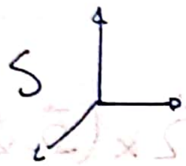
Aux 8

P1)



Tenemos



Donde S' se aleja con aceleración $\vec{a}_{0'}$ y gira con $\vec{\Omega}$

Sabemos por SNI que:

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \vec{a}'\right)$$

Donde $\vec{F} = \vec{P}$

Luego tenemos que

$$\vec{P} = m\left(\vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + 2\Omega \times \vec{v}' + \Omega \times (\Omega \times r') + \vec{a}'\right)$$

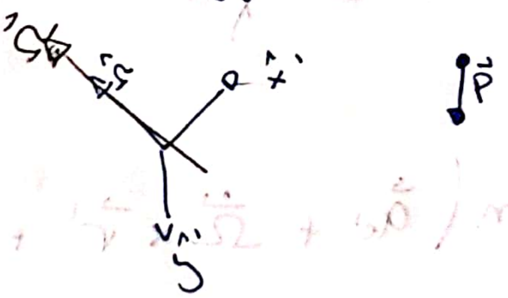
Donde $|\vec{\Omega}| = cte \Longrightarrow$

$$\vec{\Omega} = cte \Longrightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

Luego la ecuación de movimiento de nuestro sistema no inercial es:

$$\vec{P} = m\left(\vec{a}_{o'} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + \vec{a}'\right)$$

Como nos preguntan por el movimiento en el eje $\hat{\Omega}$ y en los demás, diremos que S' es:



Donde en este sistema S':

$$\vec{P} = P_{\Omega}\hat{\Omega} + P_{x'}\hat{x}' + P_{y'}\hat{y}'$$

$$\vec{a}_{o'} = a_{o'\Omega}\hat{\Omega} + a_{o'x'}\hat{x}' + a_{o'y'}\hat{y}'$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{\Omega}$$

$$\vec{v}' = v'_{\Omega}\hat{\Omega} + v'_{x'}\hat{x}' + v'_{y'}\hat{y}'$$

$$\vec{a}' = \frac{d}{dt}\vec{v}'$$

Arreglemos un poco la ecuación:

$$\vec{a}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \underbrace{\frac{\vec{P}}{m} + \vec{a}_{O'}}_{= cte}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = C_\Omega \hat{\Omega} + C_{x'}\hat{x}' + C_{y'}\hat{y}'$$

$$\boxed{\vec{a}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \vec{C}}$$

$\hookrightarrow$ ecuación de mov del S'

Para ver como es el movimiento en $\hat{\Omega}$, podemos proyectar en $\hat{\Omega}$: a través de $\cdot\hat{\Omega}$

$$\left(\vec{a}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}'\right)\cdot\hat{\Omega} = \vec{C}\cdot\hat{\Omega}$$

Donde $\vec{\Omega}\times\vec{v}'$ es $\perp$ a $\hat{\Omega}$ $\Rightarrow (\vec{\Omega}\times\vec{v}')\cdot\hat{\Omega} = 0$

$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$ es $\perp$ a $\hat{\Omega}$ $\Rightarrow [\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')]\cdot\hat{\Omega} = 0$

quedando

$$\vec{a}' \cdot \hat{\Omega} = \vec{c} \cdot \hat{\Omega}$$

$$\underbrace{= \frac{d}{dt}\vec{r}' \cdot \hat{\Omega}} = c_\Omega$$

$$\underbrace{\frac{dv'_\Omega}{dt} = c_\Omega} \longrightarrow a'_\Omega = c_\Omega$$

hay una aceleración cte en el eje $\hat{\Omega}$

$\downarrow$

hay un movimiento rectilinio acelerado en $\hat{\Omega}$!

Ahora, para ver el movimiento en los otros ejes desarrollemos vectorialmente la ecuación:

$$\vec{a}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' =$$

$$\to \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_{x'} \\ a_{y'} \\ a'_{\Omega} \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} r'_{x'} \\ r'_{y'} \\ r'_{\Omega} \end{pmatrix} \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_{x'} \\ v'_{y'} \\ v'_{\Omega} \end{pmatrix}$$

Desarrollemos los producto cruz:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{\Omega} \\ 0 & 0 & \Omega \\ v'_{x'} & v'_{y'} & v'_{\Omega} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega v'_{y'} \\ \Omega v'_{x'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es lo mismo

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = \begin{pmatrix} -\Omega r'_{y'} \\ \Omega r'_{x'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\Omega r'_{y'} \\ \Omega r'_{x'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{\Omega} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega r'_{y'} & \Omega r'_{x'} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\Omega^2 r'_{x'} \\ -\Omega^2 r'_{y'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación de movimiento nos queda:

$$\begin{pmatrix} a'_{x'} \\ a'_{y'} \\ a'_{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Omega^2 r'_{x'} \\ -\Omega^2 r'_{y'} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\Omega v'_{y'} \\ \Omega v'_{x'} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{x'} \\ c_{y'} \\ c_{\Omega} \end{pmatrix}.$$

Quedan 3 ecuaciones:

$\hat{x}'$)

$$a'_{x'} - \Omega^2 r'_{x'} - 2\Omega v'_{y'} = c_{x'}$$

$$\boxed{\ddot{x}' - \Omega^2 x' - 2\Omega \dot{y}' = c_{x'}}$$

↳ mov eje $\hat{x}'$

$\hat{y}'$)

$$a'_{y'} - \Omega^2 r'_{y'} - 2\Omega v'_{x'} = c_{y'}$$

$$\boxed{\ddot{y}' - \Omega^2 y' - 2\Omega \dot{x}' = c_{y'}}$$

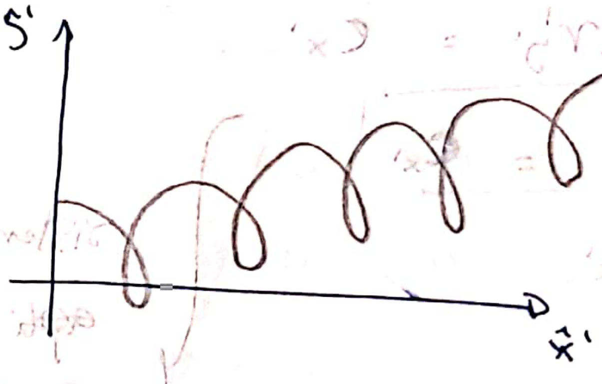
↳ mov eje $\hat{y}'$

Sistema de Edos ~~ap~~ acoplado!

$\hat{\Omega}$)

$$a'_{\Omega} = c_{\Omega}$$ (la cual ya la obtuvimos)

no es necesario resolver el sistema pero la solución del problema en los ejes $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ describirá un movimiento:

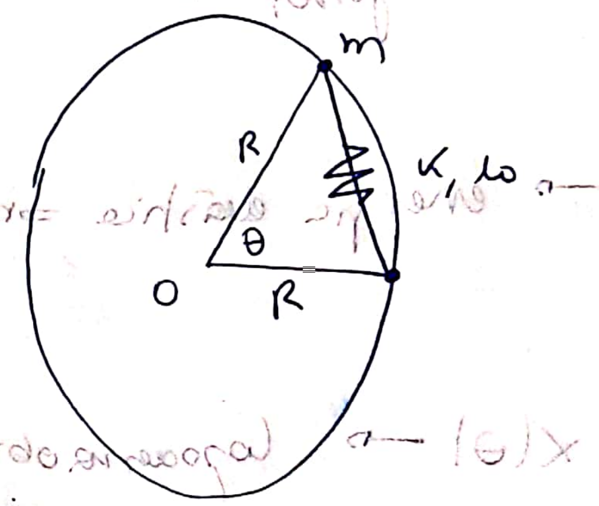


mientras que en el eje $\hat{\Omega}$ hará un mov. recto y acelerado.

Así se mueven los huracanes en la tierra!

P2)

Tenemos



queremos ver ptos de equilibrio, estabilidad y frecuencia de pequeñas oscilaciones

Lo haremos con energía:

1) Obtendremos energía potencial $U(\theta)$

2) $\frac{dU}{d\theta} = 0$ para encontrar pto de equilibrio

3) $\left.\frac{d^2U}{d^2\theta}\right|_{\theta_{eq}} >< 0$ para ver estabilidad / inestabilidad

4) Para pequeñas oscilaciones, escribiremos

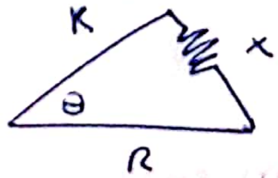
$$E = \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{U''(x_{eq})}{\alpha}$$

→ obtengamos $U(\theta)$

→ energía elástica ⇒ $U(\theta) = \frac{k}{2}\left(x(\theta) - l_0\right)^2$

$x(\theta)$ → lo podemos obtener con teo del coseno.



$$x^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta$$

$$x = R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

→ $U(\theta) = \frac{k}{2}\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right)^2$

para ptos de equilibrio $\frac{d}{d\theta}(U(\theta)) = 0$

$$\frac{d}{d\theta}U = \frac{k}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right) \cdot \frac{R}{\cancel{2}\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \cdot \cancel{2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{k\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right)R\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$

Para encontrar los ptos $\Rightarrow$ $\frac{dU}{d\theta} = 0$

$$\frac{k\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right)R\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = 0$$

$\Rightarrow$ numerador $= 0$

$\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right) = 0$ ①

$\vee$

$R\,\text{sen}\,\theta = 0$ ②

de ② $\rightarrow$ $\text{sen}\,\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_{eq} = 0, \pi}$

de ① $\rightarrow$ $R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0 = 0$

$$\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \frac{l_0}{R}$$

$$2(1-\cos\theta) = \frac{l_0^2}{R^2} \rightarrow \boxed{\cos\theta_{eq} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l_0^2}{R^2}\right)}$$

Analizemos si son estables o no

$\boxed{\theta_{eq} = 0}$

→ ponemos $\frac{d}{d\theta}(U(\theta))$ y vemos $> 0 <$ a 0

pero se puede ver en $U(\theta)$ que $\theta = 0$ es inestable ya que el denominador es $R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ y evaluamos

en $\theta = 0$ queda $R\sqrt{2(1-1)} = 0$. Explota $U(\theta)$ es inestable

Ahora veamos la otra eq:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\Bigg|_{\theta=\pi} = K\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right)' \frac{R\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} + K\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right) \cdot \left(\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\right)'$$

evaluado en $\theta = \pi$

$$\frac{R}{\cancel{2}\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \cdot \cancel{2}\,\text{sen}\,\theta$$

0

$$\frac{R\left(\cos\theta\sqrt{2(1-\cos\theta)} - \frac{\text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\right)}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{K R^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2(1-\cos\theta)} + \frac{KR}{2(1-\cos\theta)} \left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0 \right) \cdot \left(\cos\theta \sqrt{2(1-\cos\theta)} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \right)$$

$$= \frac{KR}{2(1-\cos\theta)} \left(R \operatorname{sen}^2\theta + \left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right) \cdot \left(\cos\theta\sqrt{2(1-\cos\theta)} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \right) \right)$$

evaluando en $\theta = \pi$

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = \frac{KR}{2(1+1)} \left(R \cancel{\operatorname{sen}\pi}^{0} + \left(R\sqrt{2(1+1)} - l_0\right) \left(-1\sqrt{2(1+1)} - 0\right) \right)$$

$$= \frac{KR}{4} \cdot \left(-1\sqrt{4}\right) \cdot \left(R \cdot \sqrt{4} - l_0\right) \qquad \left(\frac{d^2\theta}{d\theta^2} > 0\right)$$

$$= -\frac{KR}{2} (2R - l_0) \longrightarrow \text{si } l_0 > 2R \text{ estable}$$

$l_0 < 2R$ inestable $\left(\frac{d^2U}{d\theta^2} < 0\right)$

Ahora para $\cos\theta = 1 - \frac{l_0^2}{2R^2}$

⋮

math[?] $\longrightarrow$ siempre estable.

Para saber frecuencia debemos escribir la energía como:

$$E = \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 + U(x) \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{U''(x_{eq})}{\alpha}$$

en este caso:

$$E = \frac{m}{2}v^2 + U(\theta)$$

y $v = R\dot{\theta}$ ya que es un circulo

$$\longrightarrow E = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta) \longrightarrow \alpha = mR^2$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{U''(\theta_{eq})}{mR^2}}$$