P3)

a)

En primer lugar tenemos que

$$F_r = A( e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}$$

queremos la posición de equilibrio $\rightarrow \vec{a} = 0$

$$m\vec{a} = \vec{F}r$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}r}{m}$$

cuando $a = 0$ , $Fr = 0$

luego igualamos $Fr = 0$ y despejamos $r_{equilibrio}$

$$A(e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}) = 0$$

$$e^{-2b(r-R_0)} = e^{-b(r-R_0)}$$

$$\Rightarrow \quad -2b(r-R_0) = -b(r-R_0)$$

Escaneado con CamScanner

Para que eso se cumpla $\boxed{r = R_0}$

$\downarrow$

pos. equilibrio

b) Queremos perturbar el sistema cerca del equilibrio, es decir que r se mueve cerca de $R_0$.

Para estudiar estos movimientos lo que se hace es aproximar la Fuerza mediante una aprox de Taylor entorno a su equilibrio, así el problema se simplifica y podemos resolver la ecuación de movimiento.

La aprox de Taylor respecto a $R_0$ = equilibrio se escribe:

$$F_r(r) = \frac{F_r(R_0)}{0!} + \frac{F_r'(R_0)}{1!}(r-R_0) + \frac{1}{2!}F_r''(R_0)(r-R_0)^2 + \dots$$

Escaneado con CamScanner

Considerando solo el término lineal:

$$F_r(r) \approx F_r(R_0) + F_r'(R_0)(r-R_0)$$

$\searrow$ es una aprox buena para r cerca de $R_0$

$$F_r(R_0) = A\left(e^{\overset{1}{\cancel{-2b(R_0-R_0)}}\,0} - e^{\overset{1}{\cancel{-b(R_0-R_0)}}\,0}\right)$$

$= 0$

$$F_r'(R_0) = A\left(-2b\, e^{\overset{1}{\cancel{-2b(R_0-R_0)}}\,0} + b\, e^{\overset{1}{\cancel{-b(R_0-R_0)}}\,0}\right)$$

$$F_r'(R_0) = -bA$$

$$\longrightarrow \boxed{F_r(r) \approx -bA(r-R_0)}$$

luego $\underline{ma} = F$

$$\boxed{m\ddot{r} = -bA(r - R_0)}$$ ec de mov

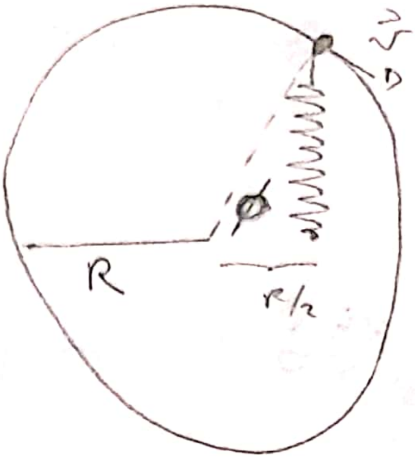
↓

ec del resorte! sabemos su solución!

Escaneado con CamScanner

P1)

Problema:



Encontrar Normal

¿Qué haremos?

1) Sistema de coordenadas

2) Encontrar $\vec{a}$

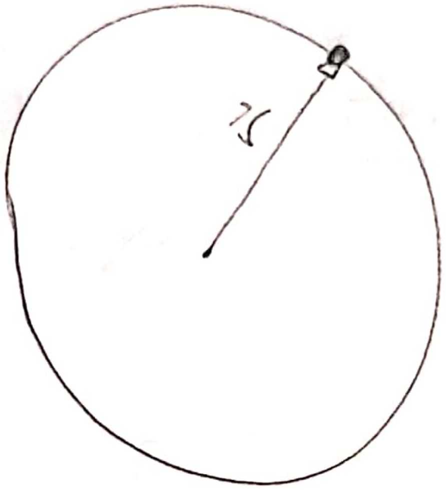
3) DCL → encontrar $\vec{F}$

4) $\vec{F} = m\vec{a}$ y despejar N

Escaneado con CamScanner

1) Como tenemos un anillo → coordenadas polares

$$\boxed{\vec{r} = R\hat{r}}$$



$$\vec{v} = \overset{0}{\cancel{\dot{R}}}\hat{r} + R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

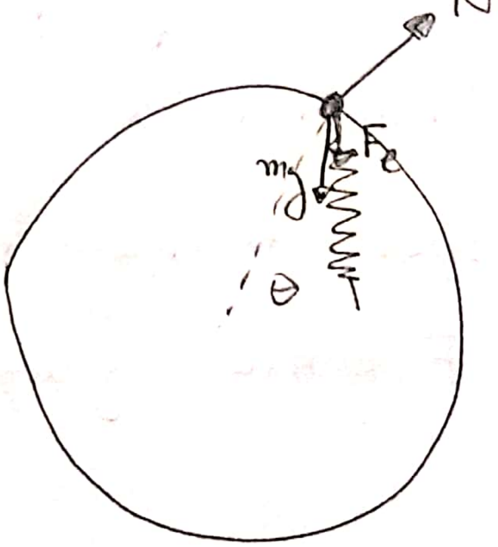
$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

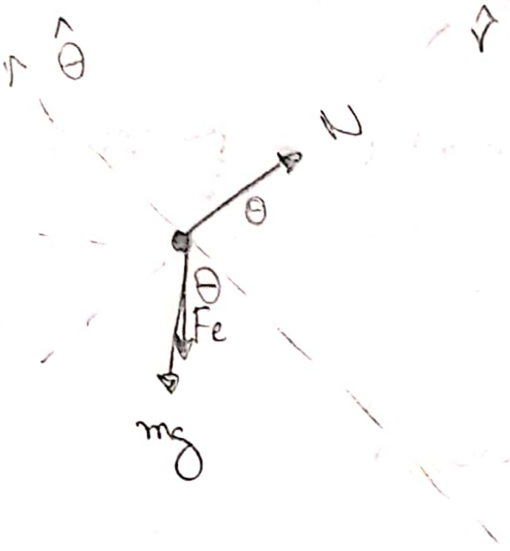
$$\vec{a} = (\overset{0}{\cancel{\ddot{R}}} - R\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\overset{0}{\cancel{\dot{R}}}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

2)

$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}}$$

3) DCL

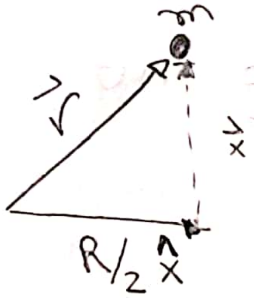




$$\vec{F} = N\hat{r} + mg\cos\theta\,\hat{\theta} + mg\,\text{sen}\theta\,\hat{r} + \vec{F}_e$$

Analizemos Fe :

Sabemos que será $\vec{F}_e = -K\vec{X}$ → distancia del inicio del resorte al final



$$\vec{X} = \underbrace{\vec{r} - \frac{R}{2}\hat{x}}$$

$$= R\hat{r} - \frac{R}{2}(\cos\theta\,\hat{r} - \text{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

$$= \left(R - \frac{R}{2}\cos\theta\right)\hat{r} + \frac{R}{2}\,\text{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

luego $\vec{F}_e = -K\left(\left(R - \frac{R}{2}\cos\theta\right)\hat{r} + \frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right)$

$$\longrightarrow \vec{F} = \left(N - mg\operatorname{sen}\theta - K\left(R - \frac{R}{2}\cos\theta\right)\right)\hat{r}$$

$$+\left(-mg\cos\theta - K\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{\theta}$$

4)

Aplicamos $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

$\hat{r}$)

$$-mR\dot{\theta}^2 = N - mg\operatorname{sen}\theta - K\left(R - \frac{R}{2}\cos\theta\right) \quad ①$$

$\hat{\theta}$)

$$mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta - K\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta \quad ②$$

Despejamos de ① N

$$\boxed{N = mg\operatorname{sen}\theta + K\left(R - \frac{R}{2}\cos\theta\right) - mR\dot{\theta}^2} \quad ☆$$

Nos falta conocer $\dot{\theta}^2$ para ello lo despejamos de ②

$$mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta - \frac{kR}{2}\operatorname{sen}\theta \quad \Big/ \cdot \dot{\theta}$$

$$mR\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\cos\theta\,\dot{\theta} - \frac{kR}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

Donde $\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)$

$$\cos\theta\,\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(-\cos\theta\right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(mR\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(-mg\operatorname{sen}\theta + \frac{kR}{2}\cos\theta\right) \Big/ \int_{t_0}^{t} dt$$

$$mR\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}\right) = -mg\left(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0\right) + \frac{kR}{2}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

Escaneado con CamScanner

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \frac{-g}{R}\left(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0\right) + \frac{K}{2m}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{R}\left(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0\right) + \frac{K}{m}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

Colocamos esto en ☆

$$\boxed{N = mg\,\text{sen}\,\theta + K\left(R - \frac{R}{2}\cos\theta\right) - mR\left(\dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{R}\left(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0\right) + \frac{K}{m}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right)}$$

D

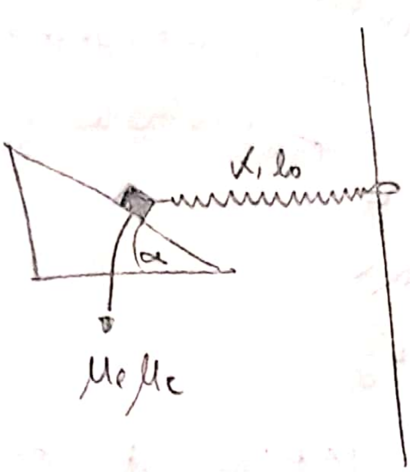
Quedan en función de $\theta_0$ ángulo inicial

$\theta$ ángulo

$\dot{\theta}_0$ velocidad angular inicial ✓

# P2)

Tenemos:



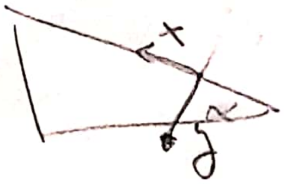
1) Sistema de coordenadas

2) aceleración

3) DCL $\longrightarrow$ F

4) Despejar largo del resorte antes que se venza el roce

1) Elegiré



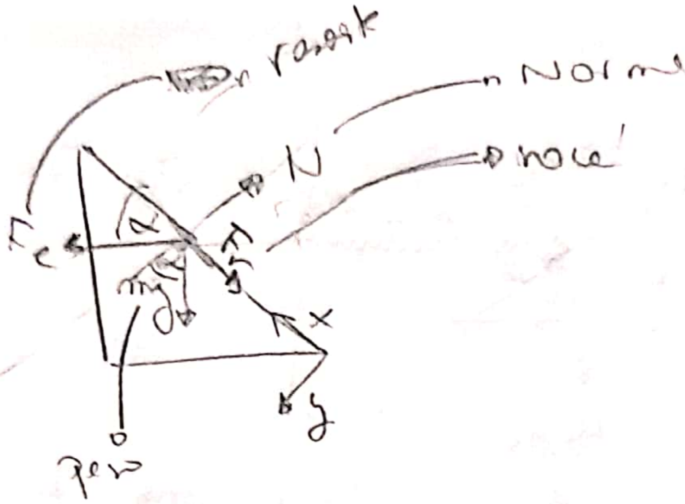
con el objetivo de que solo se mueva en x

2) $\vec{r} = x\hat{x} + \overset{0}{\cancel{y\hat{y}}} = x\hat{x}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{x}$

$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$

3) DCL



Descomponiendo →

$$\vec{F} = -N\hat{y} - F_r\hat{x} - mg\sin\alpha\,\hat{x} + mg\cos\alpha\,\hat{y}$$

$$+ F_e\sin\alpha\,\hat{y} + F_e\cos\alpha\,\hat{\alpha}$$

Donde $F_e = -k(L - l_0)$ → largo de la masa a la argolla lo que buscamos!

$$F_r = \mu_e N \quad (\text{está estático})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (\mu_e N - mg\sin\alpha - k(L - l_0)\cos\alpha)\,\hat{x}$$

$$+$$

$$(-N + mg\cos\alpha - k(L - l_0)\sin\alpha)\,\hat{y}$$

4) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\hat{x}$)

$m\cancel{\ddot{x}}^{\,0}$ (aún no se mueve!)

$$m\ddot{x} = -\mu_e N - mg\,\text{sen}\,\alpha - K(L-l_0)\cos\alpha$$

$\hat{y}$)

$$\underbrace{0 = -N + mg\cos\alpha - K(L-l_0)\,\text{sen}\,\alpha}$$

$$N = mg\cos\alpha - K(L-l_0)\,\text{sen}\,\alpha$$

metiendo esto en la ecuación de $\hat{x}$

$$0 = -\mu_e(mg\cos\alpha - K(L-l_0)\,\text{sen}\,\alpha) - mg\,\text{sen}\,\alpha - K(L-l_0)c$$

$$\mu_e K(L-l_0)\,\text{sen}\,\alpha - K(L-l_0)\cos\alpha = +\mu_e mg\cos\alpha + mg\,\text{sen}\,\alpha$$

$$(L-l_0) = \frac{+\mu_e mg\cos\alpha + mg\,\text{sen}\,\alpha}{\mu_e K\,\text{sen}\,\alpha - K\cos\alpha}$$

Escaneado con CamScanner

$$L = l_0 + \frac{\mu_e m g \cos\alpha + m g \sin\alpha}{+\mu_e k \sin\alpha - k\cos\alpha}$$

$$\boxed{L = l_0 + \frac{mg}{k}\left(\frac{\mu_e \cos\alpha + \sin\alpha}{\mu_e \sin\alpha - \cos\alpha}\right)}$$

---

$\downarrow$

largo antes de que se mueve.

b) queremos analizar cuanto se desplaza antes de <u>detenerse</u>

$\downarrow$

Para ello encontremos $x(t)$

y veamos cuando $\underline{\dot{x}(t) = 0}$ → cond. de reposo.

→ como ahora se mueve:

$$F_r = \mu_c N$$

$$y \quad \ddot{x} \neq 0$$

Volvemos a nuestras ecuaciones:

x)

$$① \quad m\ddot{x} = -\mu_c N - mg\,\text{sen}\alpha - k(L-l_0)\cos\alpha$$

y)

$$② \quad 0 = -N + mg\cos\alpha - k(L-l_0)\,\text{sen}\alpha$$

Queremos encontrar x(t) para ello resolvemos la ecuación ①, para ello despejamos en ② la $\vec{N}$ y la reemplazamos en ①

de ②

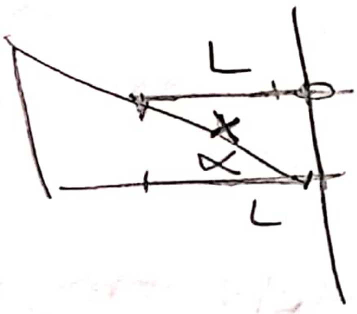
$$N = mg\cos\alpha - k(L-l_0)\,\text{sen}\alpha$$

colocamos esto en ①

$$\boxed{m\ddot{\alpha} = -\mu_c(mg\cos\alpha - k(L-l_0)\operatorname{sen}\alpha) - mg\operatorname{sen}\alpha - k(L-l_0)\cos\alpha}$$

Donde

$$L = x\cos\alpha$$



$$m\ddot{x} = -\mu_c(mg\cos\alpha - k(x\cos\alpha - l_0)\operatorname{sen}\alpha)$$
$$- mg\operatorname{sen}\alpha - k(x\cos\alpha - l_0)\cos\alpha)$$

$$\ddot{x} = -x\frac{(k\cos^2\alpha - \mu_c k\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{m} - \frac{mg(\operatorname{sen}\alpha + \mu_c\cos\alpha)}{m}$$
$$+ \frac{k(l_0\cos\alpha - l_0\operatorname{sen}\alpha\mu_c}{m}$$

$$\ddot{x} = -x\frac{k}{m}\cos\alpha(\cos\alpha - \mu_c\operatorname{sen}\alpha) - g(\operatorname{sen}\alpha + \mu_c\cos\alpha)$$
$$+ \frac{kl_0}{m}(\cos\alpha - \mu_c\operatorname{sen}\alpha)$$

Escaneado con CamScanner

Nombramos $A = \frac{k\cos\alpha}{m}(\cos\alpha - \sin\alpha\,\mu_c)$

$$B = +g(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha) + \frac{k l_0}{m}(\cos\alpha - \mu_c\sin\alpha)$$

Tenemos la ecuación

$$\boxed{\ddot{x} + Ax + B = 0} \quad / \cdot\dot{x}$$

$$\underbrace{\ddot{x}\cdot\dot{x}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)} + \underbrace{Ax\dot{x}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right)} + \underbrace{B\dot{x}}_{\frac{d}{dt}(x)} = 0$$

como → queda en reposo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + A\frac{x^2}{2} + Bx\right) = 0 \qquad \int_{t_0}^{t_f} dt$$

$t_0$ → inicio

$$\overset{0}{\cancel{\frac{\dot{x}^2}{2}(t_f)}} - \frac{\dot{x}(t_0)}{2} + \frac{A}{2}\left(x^2(t_f) - x^2(t_0)\right) + B\left(x(t_f) - x(t_0)\right) = 0$$

Escaneado con CamScanner

parte en reposo

$$-\frac{\cancelto{0}{\dot{x}^2}(t_0)}{\cancel{2}} + \frac{A}{2}\left(x(t)-x(t_0)\right)\left(x(t)+x(t_0)\right) + B\left(X(t_f)-X(t_0)\right)$$

$$\frac{A}{2}\cancel{\left(x(t_f)-x(t_0)\right)}\left(x(t_f)+x(t_0)\right) = -B\cancel{\left(x(t_f)-x(t_0)\right)}$$

$$\frac{A}{2}\left(x(t_f)+x(t_0)\right) = -B$$

$$\boxed{x(t_f) = -2B - Ax(t_0)}$$

y el desplazamiento es

$$\boxed{x(t_f) - x(t_0)}$$

$$= -2B - Ax(t_0) - x(t_0)$$

$$\boxed{= -2B - x(t_0)(A+1)}$$