Auxiliar 12

Fuerzas centrales, órbitas y pequeñas oscilaciones

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.-

Una partícula de masa m se mueve en un espacio con un potencial descrito como $V(r) = \beta r^k$, con β y k constantes. Considere que se sabe que el momentum angular en un punto es L, responda/calcule:

1. ¿El momentum angular es constante?, ¿por qué?
2. Encuentre el radio r_0 de la órbita circular
3. Identifique para qué valores de k esta órbita es estable
4. Considerando que el radio r_0 es estable, si a la masa se le pega una patadita que hace que oscile en torno a r_0, encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω_r

Respuesta

Debido a que el potencial solo depende de la distancia de la masa al origen, al calcular el gradiente de este, para calcular la fuerza, solo sobrevive el término en $\hat{r}$. Tomando coordenadas esféricas:

$$\vec{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}}\hat{\theta} - \cancelto{0}{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}}\hat{\phi}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = \beta k r^{k-1}\hat{r},$$

por lo que tenemos una fuerza central, y por ende, se conserva el momentum angular, ya que no hay fuerzas aplicándose en los ejes angulares.

Para encontrar el radio de la órbita circular usamos el potencial efectivo,

$$V_{eff}(r) = \beta r^k + \frac{L^2}{2mr^2},$$

que derivamos e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_0} = \beta k {r_0}^{k-1} - \frac{L^2}{m{r_0}^3} = 0$$
$$\Rightarrow r_0 = \left(\frac{L^2}{\beta k m}\right)^{\frac{1}{k+2}}.$$

Para analizar la estabilidad utilizamos la segunda derivada del potencial efectivo evaluada en r_0 con la expresión anterior,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_0} &= \beta k(k-1){r_0}^{k-2} + \frac{3L^2}{m{r_0}^4} \\ &= \frac{1}{{r_0}^4}\frac{(k+2)L^2}{m},\end{aligned}$$

donde si $k > -2$ (por ejemplo, el potencial gravitatorio) la segunda derivada del potencial es positiva, así que el radio r_0 es estable y si $k < -2$ es inestable.

Para calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones usamos la fórmula de un auxiliar anterior,

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''(r_0)}{m}},$$

reemplazando la expresión de $V''(r_0)$ calculada anteriormente,

$$\omega_r = \frac{L}{m{r_0}^2}\sqrt{k+2}$$

Pauta Auxiliar ~~15~~ 12

100% real

~~P1~~ P3

La energía se describe como

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

así que derivamos la expresión de las trayectorias, además recordando que $mr^2\dot{\theta} = L$

1. $\frac{dr}{dt} = kr_0\theta^{k-1}\dot{\theta} = \frac{kr}{\theta}\frac{L}{mr^2} = \frac{kL}{mr}\frac{1}{\theta}$, donde $\theta = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/k} \Rightarrow \dot{r} = \frac{kL}{mr}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/k}$

   reemplazando en (1)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{kL}{mr}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow V(\vec{r}) = \frac{-L^2}{2mr^2}\left(k^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + 1\right)$$

2. $\frac{dr}{dt} = ar_0e^{a\theta}\dot{\theta} = ar\frac{L}{mr^2} = \frac{aL}{mr} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{aL}{mr}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0$

$$\Leftrightarrow V(\vec{r}) = -\frac{L^2}{2mr^2}(a^2+1)$$

3. $\frac{dr}{dt} = r_0\dot{\theta} = \frac{r_0L}{mr^2} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\frac{L^2}{2mr^2}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + 1\right)$

~~P2~~ P2

Las órbitas circulares se dan en las posiciones de equilibrio, o sea, cuando $\partial V/\partial r = 0$, así que derivamos el potencial efectivo

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_0} = 2\lambda^2 r_0 V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow L^2 = 2m\lambda^2 r_0^4 V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} \quad (2)$$

con lo que conseguimos la ecuación que nos permitiría encontrar el radio r_0 de la órbita circular.

Para encontrar el máximo valor de L t.q. se siga teniendo órbitas circulares, primero debe cumplir (2), donde notamos que el término $r_0^4e^{-\lambda^2 r_0^2}$ tiende a 0 cuando $r_0 \to \infty$ (la exponencial le gana a r_0^4) y también cuando $r_0 \to 0$, por lo que debe existir un valor máximo de $r_0^4 e^{-\lambda^2 r^2}$, por lo tanto de L.

Derivamos e igualamos a 0 $r^4e^{-\lambda^2 r^2}$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial r}(r^4e^{-\lambda^2 r^2})\right|_{r_0} = 4r_0^3e^{-\lambda^2 r_0^2} - 2\lambda^2 r_0^5 e^{-\lambda^2 r_0^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2r_0^3 - \lambda^2 r_0^5 = 0 \Rightarrow r_0^2 = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow r_0^4 = \frac{4}{\lambda^4}$$

reemplazando en (2)

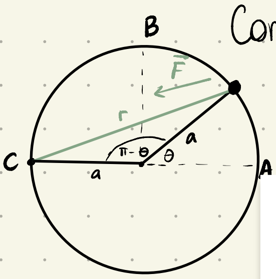
$$\Rightarrow L_{máx}^2 = 2m\lambda^2\frac{4}{\lambda^4}V_0 e^{-\lambda^2\cdot 2/\lambda^2} = \frac{8mV_0e^{-2}}{\lambda^2} \quad (3)$$

que podemos reemplazar en la expresión del potencial efectivo

$$V_{eff}(\vec{r}_0) = \frac{L^2_{max}}{2mr_0^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} = \frac{8mV_0}{e^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{2mr^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} = \frac{4V_0}{\lambda^2 e^2 r^2}$$

evaluando con $r_0^2 \Rightarrow V_{eff}(r_0) = \frac{4V_0}{\lambda^2 e^2}\frac{\lambda^2}{2} - \frac{V_0}{e^2} = \frac{V_0}{e^2}$

P3



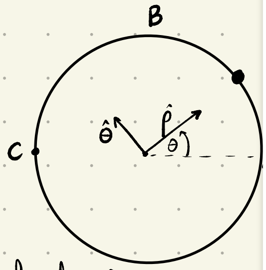
Como conocemos un ángulo y dos lados calculamos r con teorema del coseno

$$r^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(\pi-\theta) = 2a^2(1-\cos(\pi-\theta)) = 2a^2(1+\cos(\theta)),$$

así que la fuerza, que es central dirigida siempre hacia C, sería

Elegimos nuestro ... n lo que

debemos desco...



... iguales

... θ/2

... magnitud

de la fuerza

Ahora, para calcu... por lo

que la fuerza ... nto, así

que no ejerce tr... que lo

calculamos inte...

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_0}^{} F\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}\left(\frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\rho} + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\theta\right)\cdot a\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\hat{\rho}\cdot a\,d\theta\hat{\theta}}^{\perp} + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\theta}\cdot a\,d\theta\hat{\theta}$$

$$= \frac{k}{2a}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{1+\cos\theta}\,d\theta \qquad / \ \cos^2(\theta/2) = (1+\cos(\theta))/2$$

$$= \frac{k}{2a}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}\,d\theta = \frac{k}{2a}\left.\frac{1}{\cos(\theta/2)}\right|_0^{\pi/2} = \frac{k}{2a}\left(\frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{k}{2a}(\sqrt{2}-1)$$

que es positivo, ya que la fuerza es en el sentido del movimiento.