

Introducción a la mecánica lagrangiana

Javier Huenupi

29 de junio de 2022

Resumen

Este breve apunte tiene como finalidad ser un primer acercamiento a la mecánica lagrangiana. Para facilitar el entendimiento, no se utiliza un formalismo riguroso, además se utiliza lo aprendido en Cálculo Diferencial y CVV para hacer una analogía con el cálculo variacional. Si desean ver toda la historia detrás del asunto, pueden revisar, por ejemplo: el [Landau Vol. 1 Mecánica](#); el [Classical Mechanics Goldstein](#); o el libro de mecánica clásica de su autor fallecido por preferencia.

1. Acción

La acción S corresponde a un funcional (*una función de funciones*), que toma una función del tiempo y el espacio y entrega un escalar. Se define como la integral temporal del lagrangiano L

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1)$$

donde el lagrangiano es una función de la posición y la velocidad de la partícula, por lo que nos entrega todas las características del sistema que estamos trabajando^{1,2}, o sea

$$L = L(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (2)$$

$q(t)$ se le conoce como una coordenada generalizada, puede ser, por ejemplo, la coordenada $x(t)$ de cartesianas, $\theta(t)$ de polares, etc.

1.1. Minimización de la acción

La naturaleza se comporta de la forma en que la acción es minimizada, así que podemos encontrar las ecuaciones de movimiento (o sea describir el comportamiento del sistema), minimizando la acción. Similar a cómo en Cálculo Diferencial se calcula el punto en que la función tiene un mínimo, derivando con respecto a la variable independiente e igualando a cero, solo que ahora tenemos una función de funciones, por lo que se ocupa cálculo variacional.

¹ La aceleración está descrita por estas dos cantidades, así que no la necesitamos.

² Piensen en las variables que describen la energía mecánica (cinética→velocidades y potencial→posiciones), con la que podemos determinar completamente el movimiento de un cuerpo.

Supongamos que el sistema solo tiene un grado de libertad, o sea, un solo $q(t)$ que sería movimiento unidimensional, cuando podrían ser varias coordenadas $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ para movimientos más complejos³.

Digamos que $q(t)$ es la trayectoria donde S es minimizado, por lo que cualquier variación con respecto a este $q(t)$ nos entrega un valor mayor de S , o sea,

$$S[q(t) + \delta q(t)] > S[q(t)], \quad (3)$$

con $\delta q(t)$ una variación pequeña con respecto a la trayectoria $q(t)$. Estos $q(t) + \delta q(t)$ representan todas las posibles trayectorias que puede tener nuestra partícula, sin embargo, todas deben valer lo mismo para $t = t_1$ y $t = t_2$ ⁴, los límites de la integral de la acción, así que

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (4)$$

Con la Figura (1) pueden hacerse una idea de lo que estamos hablando.

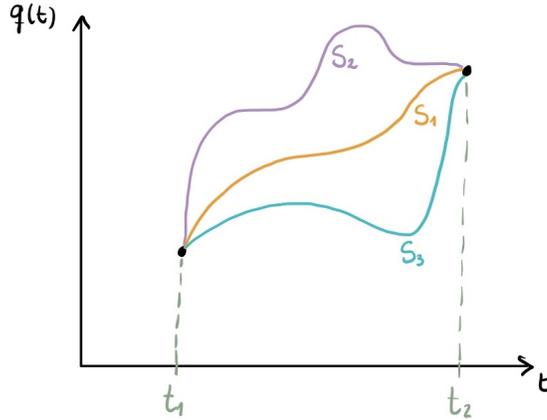


Figura 1: Gráfico de 3 posibles trayectorias de una partícula en función del tiempo y donde todas tienen el mismo valor para t_1 y t_2 . A cada trayectoria le corresponde un valor de la acción, así que lo que se quiere conseguir es la trayectoria que nos arroje el valor más pequeño de la acción en el intervalo $[t_1, t_2]$.

Para calcular la variación de la acción, recordamos de CVV que si una función está en función de más de una variable, y estas a su vez están parametrizadas, por ejemplo por el tiempo, la derivada se calcula como la suma de las derivadas de la función con respecto a las variables, de la siguiente forma: sea $f = f(x(t), y(t), z(t))$ la derivada total con respecto a t se calcula como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (5)$$

³ En un caso así sería un movimiento n -dimensional.

⁴ “Sabemos” dónde parte y dónde termina la partícula, lo que no sabemos (y queremos saber) es lo que hace entremedio.

Ahora, la variación de un funcional es bastante parecida, por la que la variación de la acción, denotado por δS se calcula como sigue

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt,\end{aligned}\tag{6}$$

lo que nos canta que integremos por partes el segundo término, definamos $u = \partial L / \partial \dot{q}$ y $dv = \delta \dot{q} = d\delta q / dt$, por lo que

$$du = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}; \quad v = \delta q,\tag{7}$$

recordando **la vaca**

$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = uv \Big|_{v_1}^{v_2} - \int_{v_1}^{v_2} v du,\tag{8}$$

por lo que (6) nos queda

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt\tag{9}$$

y como impusimos que las trayectorias tuviesen el mismo valor en t_1 y t_2 , ecuación (4), el primer término (el que se está evaluando) es cero, así que nos queda

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.\tag{10}$$

Como nosotros estamos buscando la trayectoria que minimice nuestra acción, imponemos que la variación sea 0

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0\tag{11}$$

como esto se debe cumplir para cualquier variación δq , para que se cumpla (11) el término entre paréntesis debe ser 0, por lo que finalmente se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0\tag{12}$$

que es la conocida ecuación de Euler-Lagrange

2. Lagrangiano

En los libros que les menciono en el inicio pueden encontrar una derivación de la forma general del lagrangiano para un sistema de partículas y el caso particular de una sola partícula, que es

$$L = T - U\tag{13}$$

donde $T = T(\dot{q})$ es la energía cinética de la partícula y $U = U(q)$ la energía potencial, ambas con la misma expresión de toda la vida. Ambas cantidades las podemos expresar en el sistema de coordenadas que queramos (ojalá el más conveniente), normalmente expresarán todo en coordenadas cartesianas, por lo que estas energías quedarían como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (14)$$

y $U = U(x, y, z)$.

Tienen que tener presente que **no conocemos** las expresiones de q y \dot{q} en función del tiempo, sino que lo que hacemos es que expresamos estas cantidades en función de las variables de nuestro problema, por ejemplo, la distancia constante de la masa de un péndulo al pivote y el ángulo con respecto a la vertical. Luego de encontrar las ecuaciones de movimiento con la ecuación de Euler-Lagrange, y resolverlas, conseguimos la expresión de la posición en función del tiempo.

3. Ejercicios básicos

P1

Encuentre y resuelva las ecuaciones de movimiento para el siguiente lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

¿A qué movimiento corresponde?

P2

Expresa el lagrangiano de un péndulo simple en presencia de gravedad, como el que se ve en la imagen, encuentre la ecuación de movimiento del sistema y resuélvala usando la aproximación necesaria.

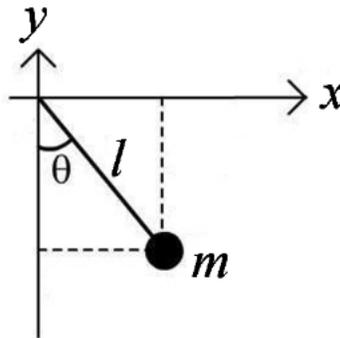


Figura 2: Péndulo simple

P3

Expresé el lagrangiano de una partícula moviéndose (sin despegarse) en la superficie de un cono invertido de ángulo de apertura α , como el que se ve en la imagen, encuentre **las ecuaciones de movimiento** del sistema y resuélvalas. Notar que el movimiento tiene dos grados de libertad: la partícula se puede acercar o alejar de la punta y puede moverse angularmente, por lo que tendrán que ocupar la ecuación de Euler-Lagrange para ambas coordenadas por separado.

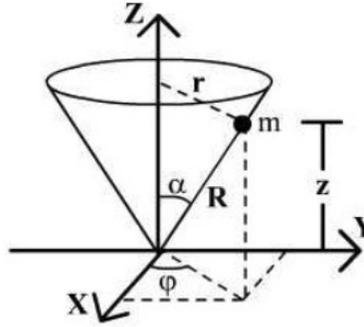


Figura 3: Partícula en un cono invertido

4. Comentarios

4.1. Lagrangiano \leftrightarrow Energía mecánica

Se pudieron haber dado cuenta que la expresión del lagrangiano, $L = T - V$, es extremadamente similar a la expresión de la energía mecánica $E = T + V$.

Por los ejercicios que han hecho en el curso, se habrán dado cuenta que con la energía mecánica pueden describir perfectamente el movimiento de una partícula y mucho más fácil que ocupando segunda ley de Newton, ya que cuando ocupamos energía para resolver problemas, nos olvidamos de las fuerzas que no tengan asociada una energía potencial, que son las fuerzas que determinan la trayectoria de la partícula, por ejemplo la fuerza normal. El lagrangiano viene a hacer algo bastante similar, ya que finalmente en la ecuación de movimiento que conseguimos con este método, podemos ver que no está presente ninguna de estas fuerzas explícitamente, lo que nos es muy útil, ya que quedamos con expresiones de la forma

$$\ddot{q}(t) = f(q, \dot{q}, t)$$

por lo que solo aparece la coordenada y sus derivadas, que es un EDO de segundo orden y se puede integrar con distintos métodos que han o irán aprendiendo. Lo importante es que tenemos **toda** la información necesaria de cómo se mueve la partícula.

4.2. Utilidad

El principio de mínima acción es algo que van a utilizar mucho y encontrarán muy útil les que decidan irse al área de la física o la astronomía, ya que los problemas se llegan a hacer tan complicados que no es factible seguir ocupando Newton (o incluso pierde sentido, por ejemplo en interacciones cuánticas).

Descubrirán que la ecuación de Euler-Lagrange tiene distintas formas, por ejemplo: se puede ocupar hasta para describir la evolución de campos escalares, algo muy utilizado en física de partículas y cosmología!!!

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0$$

y que principio de mínima acción da origen a las ecuaciones de campo de Einstein, con la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R$$
$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0,$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo.

4.3. Resumen

En resumidas palabras, para hacer uso de esta mecánica debemos seguir los siguientes pasos:

1. Expresar la posición de la partícula en función de las variables del sistema
2. Expresar la energía potencial con estas posiciones
3. Derivar la posición en los distintos ejes y escribir la energía cinética
4. Ocupar la ecuación de Euler-Lagrange

así encontramos las ecuaciones de movimiento de las distintas variables/grados de libertad de nuestro problema y, en teoría, deberíamos poder integrarlas y así obtener la posición de la partícula en función del tiempo, que es el principal objetivo.