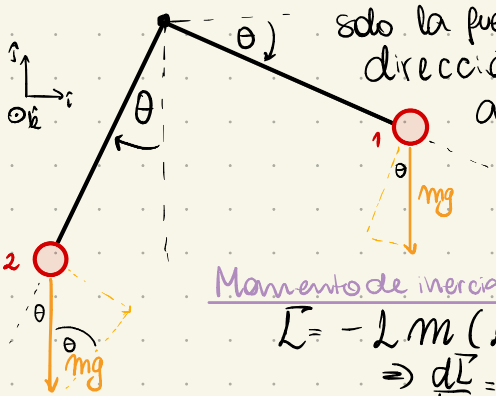
Ejercicio 4

a. (2 pts) Consideramos que la masa de abajo rotó θ con respecto a la horizontal. Calcularemos el torque actuando sobre ambas partículas, que considera solo la fuerza de gravedad, ya que la fuerza de las barras es en la misma dirección que el brazo vector; también calcularemos el momento angular para ocupar

$$\vec{\tau}^{ext} = \dot{\vec{L}}$$



Torque

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -mgL\cos\theta\,\hat{k} + mgL\sin\theta\,\hat{k}$$

Momento de inercia

$$\vec{L} = -Lm(L\dot{\theta})\hat{k} - Lm(L\dot{\theta})\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -mL^2\ddot{\theta}\hat{k} - mL^2\ddot{\theta}\hat{k} = -2mL^2\ddot{\theta}\hat{k}$$

$$\Rightarrow -2\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta}\cancel{\hat{k}} = \cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta\cancel{\hat{k}} - \cancel{m}g\cancel{L}\cos\theta\cancel{\hat{k}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2L}\cos\theta - \frac{g}{2L}\sin\theta \quad (1)$$ +0.8

Sabemos que la aceleración de cada partícula está dada por

$$\vec{a}_i = (\ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\phi}_i^2)\hat{\rho}_i + (2\dot{\rho}_i\dot{\phi}_i + \rho_i\ddot{\phi}_i)\hat{\phi}_i, \quad \text{donde } \dot{\rho}_i = \ddot{\rho}_i = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}_i = -\rho_i\dot{\phi}_i^2\hat{\rho}_i + \rho_i\ddot{\phi}_i\hat{\phi}_i$$

Nos falta calcular la velocidad angular, ocupamos (1)

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}'\,d\dot{\theta}' = \frac{g}{2L}\int_0^{\theta}\cos\theta\,d\theta - \frac{g}{2L}\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{2L}\sin\theta + \frac{g}{2L}(\cos\theta - 1) \Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L}(\sin\theta + \cos\theta - 1)}$$ +0.8

Así que las aceleraciones serían ($\hat{\rho}_i$ y $\hat{\phi}_i$ son de sist. coord. cilíndricas para cada partícula)

$$\vec{a}_{1,2} = -g(\sin\theta + \cos\theta - 1)\hat{\rho}_i + \frac{g}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\hat{\phi}_i$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{1,2}| = \sqrt{g^2(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2 + \frac{g^2}{4}(\cos\theta - \sin\theta)^2}$$ +0.2

En el momento inicial $\theta = 0 \Rightarrow |\vec{a}_{1,2}(t=0)| = \sqrt{\frac{g^2}{4}} = \frac{g}{2}$ +0.2

b. (2 pts) La velocidad de la partícula i-ésima está dada por

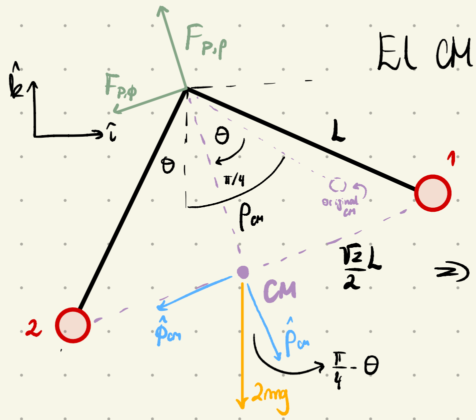
$$\vec{v}_i = \cancel{\dot{\rho}_i}\hat{\rho}_i + \rho_i\dot{\phi}_i\hat{\phi}_i$$ +0.5

$$\Rightarrow \vec{v}_{1,2} = L\sqrt{\frac{g}{L}(\sin\theta + \cos\theta - 1)}\,\hat{\phi}_i \Rightarrow |\vec{v}_{1,2}| = \sqrt{gL(\sin\theta + \cos\theta - 1)}$$ +1.0

Las partículas se encuentran a la misma altura cuando $\theta = \pi/4$

$$\Rightarrow \left|\vec{v}_{1,2}(\theta=\pi/4)\right| = \sqrt{gL(\sqrt{2}-1)} \quad +0.5$$

C. Sobre las masas actúa la fuerza de gravedad y la fuerza de las barras, nos podemos olvidar de
(2 pts) esta última considerando la dinámica de CM (la fuerza de las barras es una fuerza interna), que también se ve afectado por la fuerza del pivote



El CM se encuentra a $L^2 = \rho_{CM}^2 + \frac{2}{4}L^2 \Rightarrow \rho_{CM} = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ del pivote $+0.5$

La ec. de movimiento sería

$$2m\vec{a}_{CM} = 2m\vec{g} + \vec{F}_P$$, con $\vec{F}_P$ la fuerza del pivote $+0.3$

$$\Rightarrow 2m\left(-\rho_{CM}\dot{\phi}_{CM}^2\hat{\rho}_{CM} + \rho_{CM}\ddot{\phi}_{CM}\hat{\phi}_{CM}\right) = -2mg\hat{k} + \vec{F}_P$$

$$\sqrt{2}mL\left(-\dot{\theta}^2\hat{\rho}_{CM} + \ddot{\theta}\hat{\phi}_{CM}\right) = 2mg\left(\cos(\pi/4-\theta)\hat{\rho}_{CM} + \sin(\pi/4-\theta)\hat{\phi}_{CM}\right) + \vec{F}_P$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_P = \sqrt{2}mL\left(-\dot{\theta}^2\hat{\rho}_{CM} + \ddot{\theta}\hat{\phi}_{CM}\right) - 2mg\left(\cos(\pi/4-\theta)\hat{\rho}_{CM} + \sin(\pi/4-\theta)\hat{\phi}_{CM}\right)$$

$$= \left[-\sqrt{2}m\,g(\sin\theta + \cos\theta - 1) - 2mg\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]\hat{\rho}_{CM}$$

$$+ \left[\sqrt{2}m\frac{g}{2}(\cos\theta - \sin\theta) - 2mg\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]\hat{\phi}_{CM} \quad +0.7$$

Evaluamos en $\theta = \pi/4 \Rightarrow \vec{F}_P = \left[-\sqrt{2}mg(\sqrt{2}-1) - 2mg\right]\hat{\rho}_{CM}$ $+0.5$

$$= \left[-2mg + \sqrt{2}mg - 2mg\right]\hat{\rho}_{CM} = mg(\sqrt{2}-4)\hat{\rho}_{CM} = mg(4-\sqrt{2})\hat{k}$$

* El CM se encuentra justo entremedio de las dos partículas, y como masan lo mismo, está justo al medio. Pueden calcular esta posición R_{cm} con la fórmula para un SRI rotando junto a la estructura y les dará lo mismo