

P1

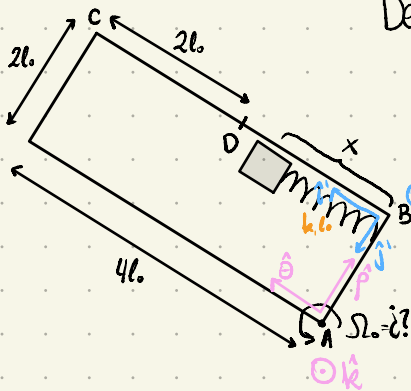
Auxiliar 21

a. Recordamos: $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{R} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$
reales traslacional centrífuga Coriolis azimutal

Definimos un SRI con coordenadas cilíndricas en el vértice A

$$\vec{R} = 2l_0\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = 2l_0\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 2l_0\ddot{\theta}\hat{\theta} - 2l_0\dot{\theta}^2\hat{\rho} = -2l_0\Omega^2\hat{\rho}$$

y definimos un SRNI con coordenadas cartesianas con origen en el vértice B y calzando el eje \hat{i}' con la pared BC $\Rightarrow \hat{i}' = \hat{\theta}$ $\hat{j}' = -\hat{\rho}$



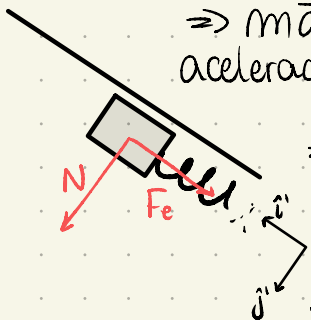
$$\begin{aligned} -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= -m\Omega_0\hat{k} \times (\Omega_0\hat{k} \times x'\hat{i}') \\ &= -m\Omega_0^2 x'\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}') \\ &= -m\Omega_0^2 x'\hat{k} \times \hat{j}' = m\Omega_0^2 x'\hat{i}' \end{aligned}$$

$$-2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{k} \times \dot{x}'\hat{i}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{k} \times \hat{i}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}'$$

$$-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0 \quad / \text{por enunciado } \Omega \text{ es cte.}$$

Habiendo encontrado las fuerzas ficticias, seguimos con las reales que afectan a la masa, son: la fuerza elástica del resorte (paralela a la pared BC, eje \hat{i}') y una fuerza normal que ejerce la pared BC (perpendicular a la pared BC, eje \hat{j}')

$\Rightarrow m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{reales}} = -k(x' - l_0)\hat{i}' + N\hat{j}'$, con lo que podemos describir la aceleración \vec{a}' del SRNI, juntamos todo



$$\Rightarrow m\vec{a}' = -2ml_0\Omega_0^2\hat{j}' - k(x' - l_0)\hat{i}' + N\hat{j}' + m\Omega_0^2 x'\hat{i}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}'$$

$$\Rightarrow m(\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}') = -2ml_0\Omega_0^2\hat{j}' - k(x' - l_0)\hat{i}' + N\hat{j}' + m\Omega_0^2 x'\hat{i}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}'$$

juntamos los términos que acompañen a un mismo vector unitario para obtener las ecs. escalares

$$\hat{i}') \quad m\ddot{x}' = -k(x' - l_0) + m\Omega_0^2 x' \quad (1)$$

$$\hat{j}') \quad m\ddot{y}' = -2ml_0\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0\dot{x}' \quad (2)$$

Para que el punto D sea punto de equilibrio, ahí la suma de "fuerzas" en el eje \hat{i}' debe ser 0, que es equivalente a decir que la aceleración \ddot{x}' sea 0 en $x' = D = 2l_0$

$$(1) \Rightarrow 0 = -k(2l_0 - l_0) + m\Omega_0^2 2l_0 \Rightarrow kl_0 = 2ml_0\Omega_0^2 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Ya con el valor de Ω_0 manipulamos (1) para que quede con la forma de un oscilador armónico

$$\Rightarrow m\ddot{x}' = x'(m\Omega_0^2 - k) + kl_0 \Rightarrow \ddot{x}' + \frac{k - m\Omega_0^2}{m} x' - \frac{kl_0}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' + \frac{k - m\Omega_0^2}{m} \left(x' - \frac{kl_0}{m(k - m\Omega_0^2)} \right) = 0$$

$$\ddot{x}' + \omega_0^2 \left(x' + \frac{kl_0}{m\Omega_0^2 - k} \right) = 0 \quad / \quad \omega_0^2 = \frac{k - m\Omega_0^2}{m}$$

Hacemos el cambio de variable $z' = x' + kl_0/(m\Omega_0^2 - k) \Rightarrow \ddot{z}' = \ddot{x}'$

$$\Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' = 0$$

con esta forma de oscilador, sabemos que el periodo se calcula como $T = 2\pi/\omega_0$.

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\Omega_0^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - mk/2m}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

b. Sabemos que antes que se despegue la masa de la pared BC, no hay movimiento en el eje \hat{j} (solo se mueve en \hat{i}), por lo que (2) queda como

$$0 = 2mb\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0 \dot{x}'$$

y la condición para que se separe la masa de la pared es que no haya contacto con esta, o sea, $N=0$, como nos interesa el momento preciso en el que se separa, consideramos ambas condiciones (se cumple en un mismo tiempo $N=0$ y $\ddot{y}'=0$)

$$\Rightarrow 0 = -2mb\Omega_0^2 - 2m\Omega_0 \dot{x}'_f \Leftrightarrow \dot{x}'_f = -b\Omega_0$$

con lo que obtenemos la velocidad en el punto en el que se separa la masa. Ahora usamos (1) que integramos con truco de mecánica

$$\Rightarrow m \dot{x}' \frac{d\dot{x}'}{dx'} = -k(x' - b) + m\Omega_0^2 x' \quad \bigg| \int_{x'_0}^{x'_f} dx' \Rightarrow m \int_{x'_0}^{x'_f} \dot{x}' d\dot{x}' = -k \int_{x'_0}^{x'_f} x' dx' + kb \int_{x'_0}^{x'_f} dx' + m\Omega_0^2 \int_{x'_0}^{x'_f} x' dx'$$

donde $\dot{x}'_0 = 0$, $\dot{x}'_f = -b\Omega_0$, $x'_0 = 4b$ y $x'_f = c$?

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \dot{x}'^2 \bigg|_{x'_0}^{x'_f} = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2} x'^2 \bigg|_{x'_0}^{x'_f} + kb x' \bigg|_{x'_0}^{x'_f}$$

$$\frac{m}{2} b^2 \Omega_0^2 = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2} (x'_f{}^2 - 16b^2) + kb(x'_f - 4b)$$

$$x'_f{}^2 + \frac{2kb}{m\Omega_0^2 - k} x'_f - 16b^2 - \frac{8kb^2}{m\Omega_0^2 - k} - \frac{mb^2\Omega_0^2}{m\Omega_0^2 - k} = 0$$

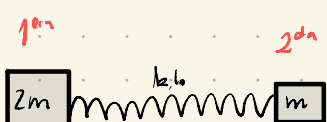
$$x'_f{}^2 - 4b x'_f - 16b^2 - \frac{8kb^2}{mk} \frac{2m}{k} + \frac{2mb^2}{k} \frac{k}{2m} = 0$$

$$x'_f{}^2 - 4b x'_f + b^2 = 0 \Rightarrow x'_f = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 4b^2}}{2} = 2b \pm b\sqrt{3} = b(2 \pm \sqrt{3})$$

Como parte en $C=4b$, se toma el valor más grande de x'_f

$$\therefore x'_f = b(2 + \sqrt{3})$$

P2



Usaremos energía, pero como hay roce, hay que considerar el trabajo producido por esta fuerza no conservativa

$$E_f - E_0 = W_{\text{no conserv.}}$$

Consideremos que la masa m se mueve una distancia máxima d debido a la velocidad inicial v_0 , como la fuerza de roce cinético se calcula como $F_r = -\mu_c N_2 = -\mu_c mg$, el trabajo

lo calculamos como

$$W_{\text{no cons.}} = - \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = - \int_{b}^{b-d} -\mu_c mg dx = +\mu_c mg x \Big|_b^{b-d} = -\mu_c mg d \quad (1)$$

y d lo podemos calcular con la condición que $2m$ siempre está quieto, por lo que la fuerza de roce estática se iguala con la fuerza elástica con el desplazamiento máx. de m

en su máximo

$$\Rightarrow \mu_c 2mg = kd \Leftrightarrow d = \frac{2\mu_c mg}{k} \quad (2)$$

$$\text{reemplazando en (1)} \Rightarrow W_{\text{no cons.}} = -\mu_c mg \frac{2\mu_c mg}{k} = -\frac{2\mu_c^2 m^2 g^2}{k}$$

Para las energías mecánicas se considera la energía cinética de ambas masas y la energía potencial del resorte (sólo una vez!), donde $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{1f} = 0$; $\dot{x}_{20} = v_0$ y $\dot{x}_{2f} = 0$; y $U_0 = 0$ y $U_f = \frac{1}{2} k d^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{\text{no cons.}}$$

$$k \left(\frac{2\mu_c mg}{k} \right)^2 - m v_0^2 = -\frac{4\mu_c^2 m^2 g^2}{k}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4\mu_c^2 m g^2}{k} + \frac{4\mu_c \mu_c m g^2}{k}} = 2g \sqrt{\frac{\mu_c m (\mu_c + \mu_c)}{k}}$$

con lo que encontramos el valor **máximo**, ya que en (2) consideramos que la fuerza de roce estático aplicado sobre $2m$ toma su máximo valor $\mu_c N$

b. Sin considerar roce, tenemos conservación de la energía. Debido a que se le aplica una velocidad inicial a m , $2m$ que inicialmente estaba en reposo, comienza a moverse de inmediato. Como ambas masas van a estar moviéndose, resulta mejor considerar el movimiento del centro de masa que se mueve con velocidad constante

$$V_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i = \frac{1}{3m} (2m \cdot 0 - m v_0) = -\frac{v_0}{3}$$

que se mantiene en todo el mov. La energía cinética se calcula como

$$K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2$$

con \dot{r}_i la velocidad de las masas con respecto al centro de masa. Como la energía se conserva, es igual a la inicial que es la energía cinética de la masa m

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{del resorte}$$

Ahora, en el punto de mayor compresión la velocidad de las partículas con respecto al CM deben ser 0 (o se podría comprimir más) $\Leftrightarrow \dot{r}_i = 0$

$$\Rightarrow K_{\min} + U_{\max} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{1}{2} 3m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} k \delta_{\max}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{1}{6} m v_0^2 + \frac{1}{2} k \delta_{\max}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\delta_{\max} = \sqrt{\frac{2}{k} \left(\frac{3}{6} m \sigma_0^2 - \frac{1}{6} m \sigma_0^2 \right)} = \sqrt{\frac{2}{3k} m \sigma_0^2}$$

Así que la longitud mínima es $l = l_0 - \delta_{\max} = l_0 - \sqrt{\frac{2}{3k} m \sigma_0^2}$