

P1

Auxiliar 25

a) Como el sistema se encuentra en reposo, la sumatoria de torques debe ser 0.

$$\Rightarrow \sum \tau_{\text{ext}} = \underbrace{2mg \cdot 2L}_{P_1} - \underbrace{mg \cdot L}_{P_2} - \tau_r = 0$$

$$3mgl - \tau_r = 3mgl - k\delta \cdot L = 0 \Rightarrow \delta = \frac{3mg}{k}$$

* Notar que no fue necesario conocer el largo natural

b) La forma generalizada de la energía mecánica es:

$$E = \frac{1}{2} \alpha \dot{\phi}^2 + U(\phi)$$

→ si es que se conserva la energía ($\dot{E} = 0$)

donde las pequeñas oscilaciones están dadas por $\omega = \sqrt{\frac{U''(\phi_{eq})}{\alpha}}$, así que calculemos

la energía potencial que considera la potencial y gravitatoria

$$\Rightarrow V(\theta) = -2mg \cdot 2L \sin \theta + mgL \sin \theta + \frac{1}{2} k (L \sin \theta + \delta)^2$$

$$= -3mgl \sin \theta + \frac{1}{2} k (L \sin \theta + \delta)^2$$

→ esto se tiene porque $\theta \ll 1$

$$\text{derivamos: } \frac{\partial V}{\partial \theta} = -3mgl \cos \theta + k(L \sin \theta + \delta) \cdot L \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = 3mgl \sin \theta + kL \cos \theta \cdot L \cos \theta - kL(L \sin \theta + \delta) \sin \theta$$

$$= 3mgl \sin \theta + kL^2 \cos^2 \theta - kL^2 \sin^2 \theta - kL\delta \sin \theta$$

evaluando en la posición de equilibrio $\theta_{eq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0) = kL^2$$

Ahora identificamos α expresando la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} 2m (2L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m (L\dot{\theta})^2 = 4mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} L^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} 9mL^2\dot{\theta}^2$$

Por lo que la energía mecánica sería

$$E = \frac{1}{2} 9mL^2\dot{\theta}^2 + U(\theta) = \frac{1}{2} \alpha \dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

así que la frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega = \sqrt{\frac{kL^2}{9mL^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 3\sqrt{\frac{m}{k}}$$

c) Ya no está la fuerza del resorte y podemos ocupar la relación

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum \vec{L}$$

Calculamos $\sum \vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, donde $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i \Rightarrow \sum \vec{L} = \sum r_i m v_i \hat{k}$

$$\sum L = 2L \cdot 2m \cdot (2L\dot{\theta}) + Lm(L\dot{\theta}) = 9mL^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sum \vec{L}}{dt} = 9mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \sum \tau_{\text{ext}} = 2mg2L\cos\theta - mgL\cos\theta = 3mgL\cos\theta = 9mL^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{3} \frac{g}{L} \cos\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} \dot{\theta} d\theta = \frac{1}{3} \frac{g}{L} \int_0^{\theta} \cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{g}{L} \sin\theta$$

y la velocidad máxima se alcanza cuando $d\dot{\theta}/dt = \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{3} \frac{g}{L} \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{g}{L} \cdot 1 \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{L}} \Rightarrow v_{\pm} = 2L\dot{\theta}_{\text{max}} = 2L\sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{L}}$$

* Preguntar al correo por hints de la P2 🤖