

Auxiliar 22

P1

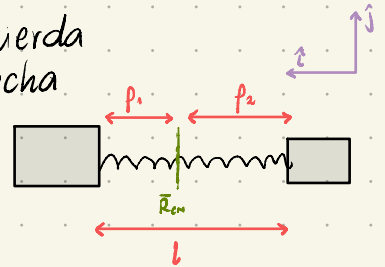
* La parte (a) y (b) están en la pauta del aux anterior.

Usamos el centro de masa como sist. referencia inercial (se mueve con velocidad de). Definimos las posiciones de las partículas c/r al CM como

p_1 , para la partícula de la izquierda
 p_2 , para la " " " " derecha

La ecuación de mov. para la partícula de la izquierda es

$$2m\ddot{p}_1 = \vec{F}_e = -k(l - l_0)\hat{i}$$



donde l es el largo del resorte que va cambiando $\Rightarrow l = p_1 + p_2$

$$\Rightarrow 2m\ddot{p}_1 = -k(p_1 + p_2 - l_0) \quad (1)$$

Como nuestro sist. es c/r al CM, podemos definir que $\vec{R}_{CM} \stackrel{!}{=} \vec{0}$

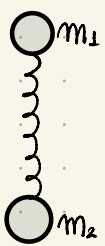
$$\Leftrightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{3m}(-2mp_1 + mp_2) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p_1 = \frac{p_2}{2}$$

por lo que (1) $\Rightarrow 2m\ddot{p}_1 = -k(p_1 + 2p_1 - l_0) \Rightarrow \ddot{p}_1 + \frac{3k}{2m}p_1 = \frac{k}{2m}l_0$

donde identificamos la frecuencia angular $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$

P2

(a) Analizamos la ec. de movimiento para m_2 en el momento en el que va a despegar para calcular el estiramiento del resorte cuando esto suceda.



Sobre la masa m_2 actúa la fuerza normal, fuerza peso y la fuerza elástica, esta última cambia de signo cuando pasa de estar comprimido a cuando está estirado, nos interesa este último caso.

$$\Rightarrow m_2\ddot{z}_2 = N - m_2g + kS_f$$

con S_f el estiramiento en el punto que se separa la masa del suelo, en este punto la aceleración y la normal es 0 (mismo argumento que en el P1 Aux 21)

$$\Rightarrow 0 = -m_2g + kS_f \Rightarrow S_f = \frac{m_2g}{k}$$

Conocemos el estiramiento final y queremos conocer el inicial, como no hay fuerzas disipativas, se conserva la energía mecánica, que considera las energías cinéticas, la energía potencial gravitatoria y la elástica.

- Energía inicial:
- Cinética: Ambos parten del reposo.
 - Gravitatoria: Tomamos el 0 en el suelo, por lo que solo la m_1 tiene
 $\Rightarrow U_g = m_1 g z_1 = m_1 g (l_0 - s_0)$
 - Elástica: Parte con compresión s_0 .
 $\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} k s_0^2$

- Energía final:
- Cinética: Para que s_0 sea la compresión mínima necesaria, ambos partículas deben acabar en reposo, o sino s_0 se pasó con la compresión inicial
 - Gravitatoria: La masa m_1 se desplaza hacia arriba $s_0 + s_f$
 $\Rightarrow U_g = m_1 g (l_0 + s_f)$
 - Elástica: El resorte acaba con un estiramiento s_f
 $\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} k s_f^2$

Por conservación de la energía $E_i = E_f$

$$\Leftrightarrow m_1 g (l_0 - s_0) + \frac{1}{2} k s_0^2 = m_1 g (l_0 + s_f) + \frac{1}{2} k s_f^2$$

Que es una ecuación cuadrática y tiene solución (En un control deben resolverlo)

(b) Ahora la compresión inicial es $2s_0$, por lo que no solo m_2 se separará del suelo cuando el estiramiento del resorte sea s_f , calculado anteriormente, (se mantiene esto), sino que la masa m_1 tendrá una velocidad hacia arriba, que denominaremos v_1 .

Usamos conservación de la energía donde la energía "final" es cuando m_2 se separa del suelo con velocidad v_2 debido al resorte

$$\Rightarrow m_1 g (l_0 - 2s_0) + \frac{1}{2} k (2s_0)^2 = m_1 g (l_0 + s_f) + \frac{1}{2} k s_f^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Donde se conoce s_0 y s_f , por lo que se puede despejar v_1 en función de valores conocidos

Cuando se separa la masa m_2 utilizamos el centro de masa que no considera fuerzas externas (fuerza del resorte), así que solo consideraríamos la fuerza gravitatoria

$$\Rightarrow M \ddot{Y}_{cm} = -Mg \Rightarrow \ddot{Y}_{cm} = -g \Rightarrow \dot{Y}_{cm} = \dot{Y}_{cm,0} t - gt^2$$

con $\dot{Y}_{cm,0}$ la velocidad inicial del CM que calculamos como

$$\dot{Y}_{cm,0} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{i,0} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0) = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \dot{Y}_{cm}(t) = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} t - gt^2$$

para calcular la posición más alta, sabemos que en ese punto $\dot{Y}_{cm}(t^*) = 0$

$$\Rightarrow \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{g} = t^*$$

integrando otra vez $\dot{Y}_{cm} \Rightarrow Y_{cm}(t) = Y_{cm,0} + \dot{Y}_{cm,0} t - \frac{gt^2}{2}$

donde $y_{cm,0}$, la posición inicial, es $y_{cm,0} = \frac{1}{M} \sum m_i y_{i,0} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1(l_0 + \delta_f) + m_2 \cdot 0)$
 $= \frac{m_1(l_0 + \delta_f)}{m_1 + m_2}$

Así que la altura más alta se da en $y_{cm}(t^*)$

$$\Rightarrow y_{cm}(t^*) = \frac{m_1(l_0 + \delta_f)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 \sigma_1}{m_1 + m_2} t^* - g \frac{t^{*2}}{2}$$

P3

(a) Por conservación del momentum lineal

$$m v_T + \beta m v_c = m(1 + \beta) v$$

justo antes del
impacto

con v la velocidad del nuevo cuerpo, por lo que debemos calcular v_T y v_c .

Como el cometa sigue una trayectoria parabólica, la energía mecánica de ese cuerpo es 0

$$\Rightarrow E_c = -\frac{G(\beta m)M_0}{R} + \frac{1}{2} \beta m v_c^2 = 0 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{2GM_0}{R}}$$

y para la tierra tenemos la ec. de mov.

$$m \left(\cancel{\ddot{r}} - r \dot{\phi}^2 \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) \hat{\phi} = -\frac{GmM_0}{r^2} \hat{r}$$

órbita circular

$$\Rightarrow \hat{r} \cdot r \dot{\phi}^2 = \frac{GM_0}{r^2} \Leftrightarrow \frac{v_T^2}{r} = \frac{GM_0}{r^2}$$

El el punto de choque: $\frac{v_T^2}{R} = \frac{GM_0}{R^2} \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{GM_0}{R}}$, con lo que calculamos v

$$\Rightarrow v = \frac{v_T + \beta v_c}{1 + \beta} = \frac{2}{1 + 1/\sqrt{2}} \sqrt{\frac{GM_0}{R}}$$

por lo que la energía después del choque es

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v^2 - \frac{G m_{\text{tot}} M_0}{R} = \frac{1}{2} m(1 + 1/\sqrt{2}) \frac{4}{(1 + 1/\sqrt{2})^2} \frac{GM_0}{R} - \frac{Gm(1 + 1/\sqrt{2})M_0}{R} \\ &= \frac{GmM_0}{R} \left(\frac{2}{1 + 1/\sqrt{2}} - (1 + 1/\sqrt{2}) \right) \\ &= \frac{GmM_0}{R} \left(\frac{2 - 1 - 2/\sqrt{2} - 1/2}{1 + 1/\sqrt{2}} \right) = \frac{GmM_0}{R} \left(\frac{1/2 - \sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

como $1/2 < \sqrt{2} \Rightarrow E < 0$, así que la órbita es elíptica

(b) Luego del impacto se conserva el momentum angular ($l = m_{\text{tot}} r^2 \dot{\phi}$), así que consideramos el momentum justo después del impacto y el momentum en el punto más lejano, donde en ambas posiciones solo hay velocidad angular, la velocidad radial es 0 al ser los semi-ejes de la elipse.

$$\Rightarrow M_{\text{tot}} R v = M_{\text{tot}} R_{\text{max}} v_f$$

$$\Rightarrow V_f = V \frac{R}{R_{\max}}$$

nos falta una ec, por lo que consideramos que se conserva la energía mecánica

$$\Rightarrow E(p=R) = E(p=R_{\max})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_{\text{rot}} V^2 - \frac{G m_{\text{rot}} M_0}{R} = \frac{1}{2} m_{\text{rot}} V_f^2 - \frac{G m_{\text{rot}} M_0}{R_{\max}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (1+1/\sqrt{2}) \frac{4}{(1+1/\sqrt{2})^2} \frac{G M_0}{R} - \frac{G (1+1/\sqrt{2}) M_0}{R} = \frac{1}{2} (1+1/\sqrt{2}) V_f^2 - \frac{G (1+1/\sqrt{2}) M_0}{R_{\max}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+1/\sqrt{2}} \frac{G M_0}{R} - \frac{G (1+1/\sqrt{2}) M_0}{R} = \frac{1}{2} (1+1/\sqrt{2}) \frac{R^2}{R_{\max}^2} \frac{4}{(1+1/\sqrt{2})^2} \frac{G M_0}{R} - \frac{G (1+1/\sqrt{2}) M_0}{R_{\max}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^2 \frac{2}{R(1+1/\sqrt{2})} - \frac{1+1/\sqrt{2}}{R_{\max}} \quad / \cdot R$$

$$\Leftrightarrow -c = \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^2 \cdot a + \left(\frac{R}{R_{\max}} \right) \cdot b$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

matraqueando se obtiene que $x_{1,2} = \frac{1 \pm (4/(1+1/\sqrt{2})^2 - 1)}{4/(1+1/\sqrt{2})^2}$

$$= \left[1 \pm \left(\frac{4 - (1+1/\sqrt{2})^2}{(1+1/\sqrt{2})^2} \right) \right] \cdot \frac{(1+1/\sqrt{2})^2}{4}$$

$$= \frac{(1+1/\sqrt{2})^2 \pm (4 - (1+1/\sqrt{2})^2)}{4}$$

donde notamos que si tomamos el signo + $\Rightarrow x_1 = 1 = \frac{R}{R_{\max}} \Rightarrow R_{\max} = R$, tomando el

signo negativo $\Rightarrow x_2 = \frac{2(1+\sqrt{2}+1/2)-4}{4} = \frac{-2+2\sqrt{2}+1}{4} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} = \frac{R}{R_{\max}}$

$$\Rightarrow R_{\max} = R \left(\frac{4}{2\sqrt{2}-1} \right) > R$$