

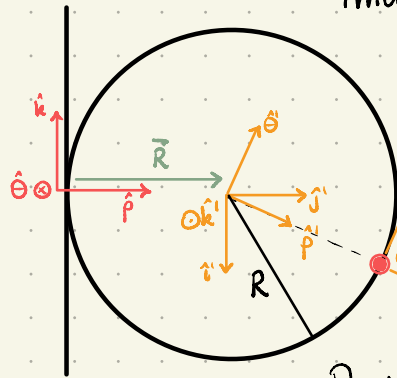
P1

Auxiliar 19

Recordemos nuestra fórmula maestra

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

reales traslacional centrífuga Coriolis azimutal



En este caso definiremos "2" SRNI (nuestro aro), ya que la masa se mueve en un círculo (el aro), por lo que conviene usar coord. polares $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$, pero también definiremos el sist. de coord. cartesianas $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$, para poder descomponer $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$ en este sist. y luego encontrar una relación con el sist. $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$ que es de utilidad, ya que el SRNI se mueve en un círculo alrededor de la vara (nuestro SRNI)

Por lo tanto, tenemos que la posición del SRNI c/ al SR1, $\vec{R}$, es
 $\vec{R} = R\hat{p}' \Rightarrow \dot{\vec{R}} = R\dot{\theta}'\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\ddot{\theta}'\hat{p}' + R\ddot{\theta}'\hat{\theta}'$, ya que $\dot{\theta}' = \Omega$ constante
 $\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\Omega^2\hat{p}'$ (1)

Ahora describamos la posición de la partícula en el SRNI

$$\vec{r}' = R\hat{p}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = R\dot{\theta}'\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = -R\ddot{\theta}'\hat{p}' + R\ddot{\theta}'\hat{\theta}'$$
 (2)

Pasemos de $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ a $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$, por lo tanto tenemos las descomposiciones

$$\hat{i}' = \cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}' ; \hat{j}' = \sin\theta'\hat{p}' + \cos\theta'\hat{\theta}' ; \hat{k}' = \hat{k}'$$

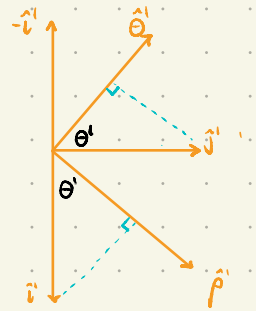
Reemplazemos en (2) y calculamos las fuerzas ficticias donde $\vec{\Omega} = -\Omega\hat{i}'$

$$\triangleright -m\ddot{\vec{R}} = mR\Omega^2\hat{p}' = mR\Omega^2\hat{j}' = mR\Omega^2(\sin\theta'\hat{p}' + \cos\theta'\hat{\theta}')$$

$$\begin{aligned} \triangleright -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= m\Omega^2\hat{i}' \times (-\Omega\hat{i}' \times R\hat{p}') \\ &= -m\Omega^2R(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times ((\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times \hat{p}') \\ &= -m\Omega^2R\sin\theta'(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times \hat{k}' \\ &= m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'\hat{\theta}' + m\Omega^2R\sin^2\theta'\hat{p}' \end{aligned}$$

$$\triangleright -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' = 2m\Omega(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times R\dot{\theta}'\hat{\theta}' = 2m\Omega\cos\theta'R\dot{\theta}'\hat{k}'$$

$$\triangleright -m\vec{\Omega} \times \vec{r}' = 0 \quad (\Omega \text{ es constante})$$



Ahora describamos las fuerzas reales, que son: el peso en $\hat{i}'$ y las normales ejercidas por el aro en $\hat{p}'$ y $\hat{k}'$

$$\Rightarrow m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = mg\hat{i}' + N_p\hat{p}' + N_z\hat{k}', \text{ describimos en } (\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$$

$$= mg(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') + N_p\hat{p}' + N_z\hat{k}'$$

Juntamos todo

$$m(-R\ddot{\theta}'\hat{p}' + R\ddot{\theta}'\hat{\theta}') = mg(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') + N_p\hat{p}' + N_z\hat{k}' + mR\Omega^2(\sin\theta'\hat{p}' + \cos\theta'\hat{\theta}') + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'\hat{\theta}' + m\Omega^2R\sin^2\theta'\hat{p}' + 2m\Omega\cos\theta'R\dot{\theta}'\hat{k}'$$

y la proyección en $\hat{\theta}'$ es hacer el producto punto de esta última ecuación con $\hat{\theta}'$, que es lo mismo

que escoger la ec. escalar en θ'

$$\theta') mR\ddot{\theta}' = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta', \text{ donde identificamos } f$$

$$f(\theta') = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'$$

b) Calculamos la energía potencial como dice el enunciado

$$f = -\frac{1}{R} \frac{dU}{d\theta'} \Leftrightarrow \frac{1}{R} \frac{dU}{d\theta'} = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta' \quad / \cdot R \int d\theta'$$

$$\Rightarrow \int dU = -mgR \int \sin\theta' d\theta' + mR^2\Omega^2 \int \cos\theta' d\theta' + m\Omega^2R^2 \int \sin\theta'\cos\theta' d\theta'$$

$$\Leftrightarrow U(\theta') = -mgR\cos\theta' - mR^2\Omega^2\sin\theta' - mR^2\Omega^2 \frac{\sin^2\theta'}{2} + C$$

donde C es la suma de las constantes de integración y podemos definir como 0

c) Sabemos que el punto de equilibrio se tiene para $dU/d\theta' = 0$,

$$\left. \frac{dU}{d\theta'} \right|_{\theta=\theta^*} = mgR\sin\theta^* - mR^2\Omega^2\cos\theta^* - mR^2\Omega^2\sin\theta^*\cos\theta^* \stackrel{!}{=} 0$$

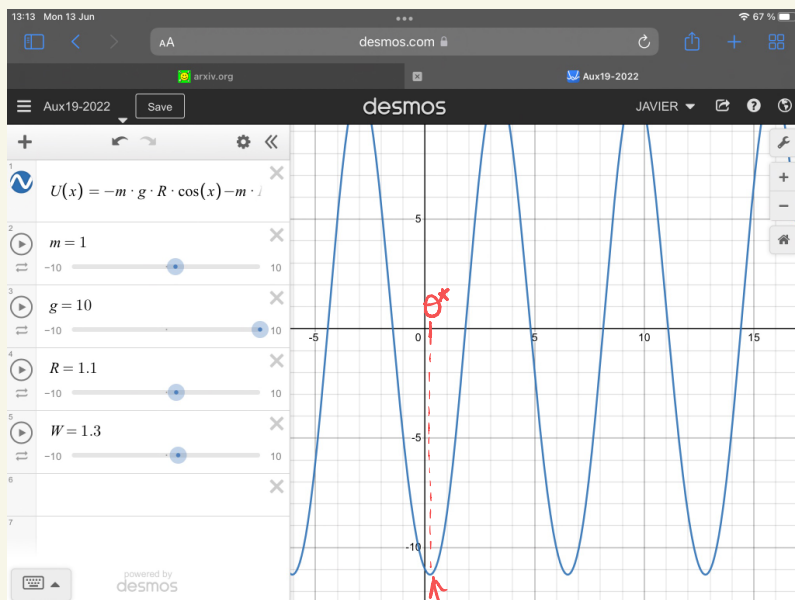
Donde resulta difícil despejar θ^* , pero tenemos por enunciado que $\theta^* \approx 0$, por lo que podemos aproximar $\sin\theta^* \approx \theta^*$ ^ $\cos\theta^* \approx 1$

$$\Rightarrow mgR\theta^* - mR^2\Omega^2 - mR^2\Omega^2\theta^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta^* = \frac{mR^2\Omega^2}{mgR - mR^2\Omega^2} = \frac{R\Omega^2}{g - R\Omega^2}$$

además nos dicen que $R\Omega^2 \ll g$ por lo que nos queda

$$\theta^* \approx \frac{R\Omega^2}{g} \approx 0$$



En este plot vemos el potencial $U(\theta')$ con la condición de que $R\Omega^2 \ll g$, lo que provoca que uno de los mínimos (punto de equilibrio estable) sea cercano a 0, por lo que se puede hacer la aproximación de los senos y cosenos.

Mecánica lagrangiana

Vista de lado

El lagrangiano se define como $L = T - V$, donde usaremos la velocidad en cartesianas y la energía potencial es la gravitacional, que definiremos 0 en el centro del aro.

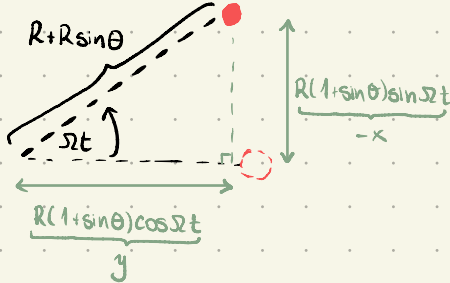
$$x(t) = -R(1 + \sin\theta)\sin\Omega t ; y(t) = R(1 + \sin\theta)\cos\Omega t ; z(t) = -R\cos\theta$$

derivamos

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\cos\theta\dot{\theta}\sin\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\cos\Omega t \\ \dot{y} = R\cos\theta\dot{\theta}\cos\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t \\ \dot{z} = R\sin\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

Primero definimos la posición con respecto a las variables del problema y luego la derivamos para encontrar la velocidad

Vista de arriba



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \left((-R\cos\theta\dot{\theta}\sin\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\cos\Omega t)^2 + (R\cos\theta\dot{\theta}\cos\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t)^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\sin^2\Omega t + 2R^2\cos\theta\dot{\theta}(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2\cos^2\Omega t + R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\cos^2\Omega t - 2R^2\cos\theta\dot{\theta}(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2\sin^2\Omega t + R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2 \right)$$

y la energía potencial sería $V = mgz = -mgR\cos\theta$. Con lo que el lagrangiano nos queda

$$L = \frac{1}{2} m \left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2 \right) + mgR\cos\theta$$

y las ecuaciones de movimiento se calculan con la ec. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \left(\text{en verdad es con } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\Omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mR^2\ddot{\theta}$$

Así que la ecuación de Euler-Lagrange nos queda

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\Omega^2\cos\theta + mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + mR\Omega^2\cos\theta + mR\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

Que si son observadores, encontramos la misma ecuación de la proyección en $\hat{\theta}'$, solo que sin ver nada de SRN!...