Auxiliar 17

P1

a) Debido a que trabajamos en un cilindro (y nos dan una expresión de z en función de θ), usamos coord. cilíndricas.

Para este problema es importante recordar que la normal es perpendicular a la superficie/trayectoria por la que se mueve la masa, por lo que necesitamos calcular el vector tangente a la trayectoria, ya que así podemos imponer que $\vec{N}\cdot\hat{t}=0$ (perpendiculares).

Usamos la fórmula

$$\hat{t}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

donde la velocidad en cilíndricas, con $\dot{\rho}=\ddot{\rho}=0$, $\rho=R_0$ y $z=h-\theta R_1 \Rightarrow \dot{z}=-\dot{\theta}R_1$, es

$$\vec{v}=\cancel{\dot{\rho}\hat{\rho}}+\rho\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{z}\hat{k}=R_0\dot{\theta}\hat{\theta}-\dot{\theta}R_1\hat{k} \Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{R_0^2\dot{\theta}^2+R_1^2\dot{\theta}^2}=\dot{\theta}\sqrt{R_0^2+R_1^2}$$

$$\Rightarrow \hat{t}=\frac{R_0\dot{\theta}\hat{\theta}-R_1\dot{\theta}\hat{k}}{\dot{\theta}\sqrt{R_0^2+R_1^2}}=\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{\theta}-\frac{R_1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\hat{k}$$

Ahora, la forma más general de la normal es asumiendo que tiene componentes en los 3 ejes, osea

$$\vec{N}=N_\rho\hat{\rho}+N_\theta\hat{\theta}+N_k\hat{k}\text{, imponemos } \vec{N}\cdot\hat{t}=0$$

$$\Rightarrow \vec{N}\cdot\hat{t}=\frac{N_\theta R_0}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}-\frac{N_z R_1}{\sqrt{R_0^2+R_1^2}}\overset{!}{=}0 \Rightarrow N_\theta=N_z\frac{R_1}{R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{N}=N_\rho\hat{\rho}+\frac{R_1}{R_0}N_z\hat{\theta}+N_z\hat{k}$$

b) Ahora, hacemos dinámica, donde las fuerzas son: el peso ($-mg\hat{k}$), la normal ($\vec{N}$) y el roce

$$m\left((\cancel{\ddot{\rho}}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+(\cancel{2\dot{\rho}}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k}\right)=-mg\hat{k}+N_\rho\hat{\rho}+\frac{R_1}{R_0}N_z\hat{\theta}+N_z\hat{k}-c(\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{z}\hat{k})$$

$$\Rightarrow m(-R_0\dot{\theta}^2\hat{\rho}+R_0\ddot{\theta}\hat{\theta}-\ddot{\theta}R_1\hat{k})=-mg\hat{k}+N_\rho\hat{\rho}+\frac{R_1}{R_0}N_z\hat{\theta}+N_z\hat{k}-c(R_0\dot{\theta}\hat{\theta}-\dot{\theta}R_1\hat{k})$$

Con lo que las ecs. escalares son:

$\hat{\rho}$) $-mR_0\dot{\theta}^2=N_\rho$

$\hat{\theta}$) $mR_0\ddot{\theta}=\frac{R_1}{R_0}N_z-cR_0\dot{\theta}$

$\hat{k}$) $-mR_1\ddot{\theta}=-mg+N_z+cR_1\dot{\theta}$

c) Notamos que en $\hat{\theta}$) y $\hat{k}$) tenemos N_z que no conocemos, por lo que despejamos esta componente e igualamos

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_1}(mR_0\ddot{\theta}+cR_0\dot{\theta})=-mR_1\ddot{\theta}+mg-cR_1\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}\left(\frac{mR_0^2}{R_1}+mR_1\right)=\underbrace{-\left(\overbrace{\dot{\theta}-mg\left(\frac{cR_0^2}{R_1}+cR_1\right)^{-1}}^{\dot{z}}\right)\left(\frac{cR_0^2}{R_1}+cR_1\right)}_{\text{reordenamiento para hacer el C.V}}$$

que podemos resolver con polinomio característico o a lo mecánica. Hagamos el c.v.

$$\dot{z} = \dot{\theta} - mg\frac{R_1}{c}\frac{1}{(R_0^2+R_1^2)} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}\frac{m}{\cancel{R_1}}\cancel{(R_0^2+R_1^2)} = -\dot{z}\frac{c}{\cancel{R_1}}\cancel{(R_0^2+R_1^2)}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{z} = -c\dot{z}$$

$$\Rightarrow m\int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}}\frac{d\dot{z}}{\dot{z}} = -c\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m\ln\left(\frac{\dot{z}}{\dot{z}_0}\right) = -ct$$

$$\Leftrightarrow \dot{z}(t) = z_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

donde como $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \dot{z}(0) = -\frac{mg}{c}R_1\frac{1}{R_0^2+R_1^2}$

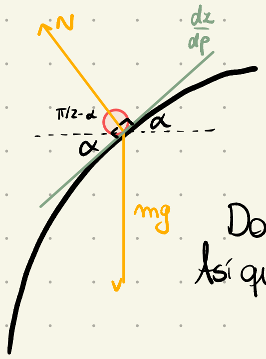
$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) - \frac{mg}{c}R_1\frac{1}{R_0^2+R_1^2} = -\frac{mg}{c}R_1\frac{1}{R_0^2+R_1^2}e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{mg}{c}\frac{R_1}{R_0^2+R_1^2}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

Donde notamos que sin importar el roce, la partícula nunca deja de girar ni bajar, pero alcanza una velocidad angular máxima de $mgR_1/c(R_0^2+R_1^2)$

P2

Debido al mov. usamos coord. cilíndricas, donde las fuerzas involucradas son: peso $(-mg\hat{k})$ y la normal $\vec{N}$



$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k}\right)=-mg\hat{k}+\vec{N}$$

$$=-mg\hat{k}-N_\rho\hat{\rho}+N_z\hat{k}$$

Donde $N_\rho = N\cos(\pi/2-\alpha)$ ^ $N_z=\sin(\pi/2-\alpha)N$ y el ángulo α está dado por: $\alpha = dz/d\rho$

Así que derivamos z y evaluamos en $\rho = L$

$$\Rightarrow \left.\frac{dz}{d\rho}\right|_{\rho=L} = \frac{L^2}{L^2}=1 \Rightarrow \alpha=\pi/4$$

Así que las ecs. escalares quedan:

$$\hat{\rho})\ -mL\dot{\theta}^2 = -\frac{N}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{\theta})\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta})=0$$

$$\hat{k})\ 0=-mg+\frac{N}{\sqrt{2}} \Rightarrow N=\sqrt{2}\,mg$$

$$\hat{\rho}) \longrightarrow -mL\dot{\theta}^2 = -mg \Rightarrow \dot{\theta}=\sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow v_0=\dot{\theta}L=\sqrt{gL}$$

b) Usamos conservación de la energía mecánica, donde la condición final es que $\dot{\rho}=\dot{z}=0$ y la condición inicial $\rho_0=L$ ^ $\rho_0\dot{\theta}_0=v_0$, y donde

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{L^2}{\rho^2}\dot{\rho}\right)^2\right)+mg\frac{L^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow E_0=\frac{1}{2}mv_0^2+mg \quad ^\wedge \quad E_f=\frac{1}{2}mv_f^2+mg\frac{L^2}{\rho_f}$$

y podemos calcular la velocidad final con el momentum angular

$$\rho_0 v_0 = \rho_f v_f \Rightarrow v_f=\frac{Lv_0}{\rho_f}$$

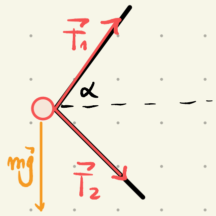
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2+mg=\frac{1}{2}m\frac{L^2v_0^2}{\rho_f^2}+mg\frac{L^2}{\rho_f}$$

que es una ecuación cuadrática resoluble jaja $\therefore z_{min}=-\frac{L^2}{\rho_f}$

P3

Hacemos algo similar al anterior, descomponemos las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ en $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$

La dinámica es:



$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k}\right)=-mg\hat{k}+\vec{T}_1+\vec{T}_2$$

$$=-mg\hat{k}+(T_1\sin\alpha-T_2\sin\alpha)\hat{k}-(T_1\cos\alpha+T_2\cos\alpha)\hat{\rho}$$

Imponiendo un mov. circ. unif. $\Rightarrow \dot{\rho}=\ddot{\rho}=0$, $\ddot{z}=0$. Las ecs. escalares quedan:

$\hat{\rho}$) $-mr_0\dot{\theta}^2=-(T_1+T_2)\cos\alpha$

$\hat{\theta}$) $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=0$

$\hat{k}$) $0=-mg+(T_1-T_2)\sin\alpha$

Y la condición para que las cuerdas se mantengan tensas es que $T_1, T_2>0$. Juntemos $\hat{\rho}$) y $\hat{k}$)

$$T_2=\frac{mr_0\dot{\theta}^2}{\cos\alpha}-T_1=\frac{mr_0\dot{\theta}^2}{\cos\alpha}-\frac{mg}{\sin\alpha}-T_2$$

$$\Leftrightarrow 2T_2=\frac{mr_0\dot{\theta}^2}{\cos\alpha}-\frac{mg}{\sin\alpha}>0$$

$$\Rightarrow r_0\dot{\theta}^2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-g>0$$

donde por geometría $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{H}{2r_0} \Rightarrow \cancel{r_0}\dot{\theta}^2\frac{H}{2\cancel{r_0}}-g>0 \Rightarrow \dot{\theta}>\sqrt{\frac{2g}{H}}$

b) Describamos r con pitágoras

$$r^2+\frac{H^2}{4}=L^2 \Rightarrow r^2=L^2-\frac{H^2}{4} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 2r\dot{r}=2L\dot{L}$$

$$=-2Lv_0$$

$$\Rightarrow \dot{r}=-\frac{v_0L}{r} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \ddot{r}=-v_0\left(\frac{\dot{L}r-L\dot{r}}{r^2}\right)$$

$$=-v_0\left(-\frac{v_0}{r}+\frac{L}{r^2}\frac{v_0L}{r}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{r}\left(1-\frac{L^2}{r^2}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{r}\left(\frac{r^2-L^2}{r^2}\right)=\frac{v_0^2}{r^3}\cdot -\frac{H^2}{4}$$

$\therefore$ La cte. es $-v_0^2H^2/4$