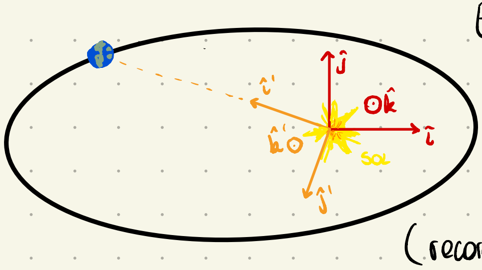
Auxiliar 16

P1

Para sist. de referencia no inerciales tenemos la siguente ec. que considera fuerzas reales y ficticias

$$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrifuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}}$$



En este caso tenemos que el origen de nuestro SRNI $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$ está siempre en el origen del SRI $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

$$\Rightarrow \vec{R} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$$

Ahora describamos $\vec{r}'$ y $\dot{\vec{r}}' = \vec{v}'$. Como la Tierra siempre está en el eje $\hat{\imath}'$ (recordar que el SRNI sigue el mov. de la Tierra), entonces

$$\vec{r}' = r\hat{\imath}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{r}\hat{\imath}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{\imath}'$$

Y tenemos que $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{k}$, donde $\hat{k} = \hat{k}'$, así que calculemos las fzas. ficticias

- $-m\ddot{\vec{R}} = 0$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\dot{\phi}\hat{k}'\times(\dot{\phi}\hat{k}'\times r\hat{\imath}') = -m\dot{\phi}\hat{k}\times\dot{\phi}r\hat{\jmath}' = m\dot{\phi}^2 r\hat{\imath}'$
- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\dot{\phi}\hat{k}'\times\dot{r}\hat{\imath}' = -2m\dot{\phi}\dot{r}\hat{\jmath}'$
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = -m\ddot{\phi}\hat{k}'\times r\hat{\imath}' = -m\ddot{\phi}r\hat{\jmath}'$

Y la única fuerza **real** es la de gravedad que descrita en el sist. de SRNI es

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\imath}'$$

juntamos todo

$$\Rightarrow m\ddot{r}\hat{\imath}' = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\imath} + m\dot{\phi}^2 r\hat{\imath}' - 2m\dot{\phi}\dot{r}\hat{\jmath}' - m\ddot{\phi}r\hat{\jmath}',$$ y las ecs. escalares serían

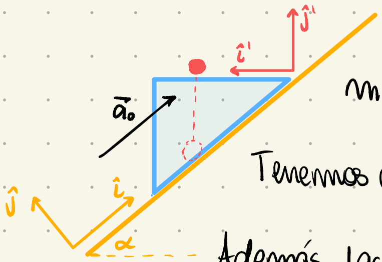
$\hat{\imath}')$ $$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + m\dot{\phi}^2 r\hat{\imath}$$

$\hat{\jmath}')$ $$0 = -2m\dot{\phi}\dot{r} - m\ddot{\phi}r = -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\phi} = \ell$$

por lo que la ec. en $\hat{\imath}'$ queda $$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3}$$

P2

Definimos el SRNI con origen en el extremo superior derecho de la cuña (donde comienza la bolita) que se mueve de forma acelerada c/r a la rampa, que es un SRI al estar quieto. Definimos el origen del SRI en la parte inferior de la rampa, con el eje $\hat{\imath}$ paralelo a la rampa



Como los sist.s siempre está alineados, no rotan c/r a ellos $\vec{\Omega}=0$, lo que simplifica mucho la expresión

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1)$$

Tenemos que $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{\imath}$ que debemos describir en el SRNI

$$\ddot{\vec{R}} = a_0(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{\jmath})$$

Además, las fuerzas reales actuando sobre la masa son: la gravedad y la normal de la cuña

$$\Rightarrow m\vec{a} = -mg\hat{\jmath}' + N\hat{\jmath}'$$

Así que (1) nos queda como

$$m(\ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{\jmath}') = -mg\hat{\jmath} + N\hat{\jmath} - ma_0(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{\jmath}')$$

y las ecs. escalares

$$\hat{\imath}')\ m\ddot{x}' = ma_0\cos\alpha$$
$$\hat{\jmath}')\ m\ddot{y}' = -mg\hat{\jmath}' + N\hat{\jmath} - ma_0\sin\alpha\,\hat{\jmath}'$$

Solo nos interesa $\hat{\imath}'$), ya que queremos saber cuándo llega al borde (mov. horizontal), así que trabajamos esta expresión

$$m\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}'} d\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\int_0^t dt$$
$$\Leftrightarrow m\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\, t$$
$$\Rightarrow m\int_{x_0'}^{x} dx' = ma_0\cos\alpha\int_0^t t\,dt$$
$$\Leftrightarrow m\,x'(t) = ma_0\cos\alpha\,\frac{t^2}{2}$$

donde consideramos que parte en el origen del SRNI (es arbitrario) y parte con velocidad nula.

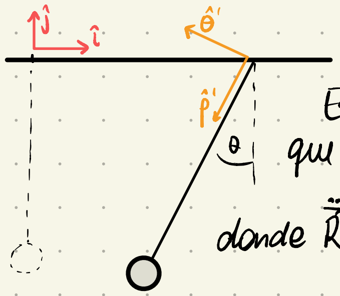
Así que veamos cuándo $x'(t^*) = D$

$$\Rightarrow mD = ma_0\cos(\pi/4)\,\frac{t^{*2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^{*2} = \frac{2D}{a_0\cos\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}D}{a_0} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}D}{a_0}}$$

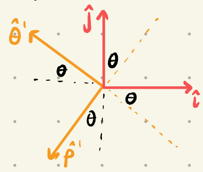
P3

Definimos el SRNI con un sist. de coordenadas polares con origen en el origen del péndulo, que se mueve con aceleración a_o. Nuestro SRI será un sist. cartesiano con origen donde parte el movimiento y con $\hat{\imath}$ paralelo a la barra



Nuestro $\vec{r}\,'$ es el $\vec{r}$ de polares $\Rightarrow \vec{r}\,' = L\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}\,' = L\dot{\theta}\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}\,' = -L\dot{\theta}^2\hat{\rho}' + L\ddot{\theta}\hat{\theta}' = \vec{a}\,'$

Este sist. en polares tiene contemplado el mov. angular, por lo que $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\Omega}} = 0$, así que la ec. nos quedaría



$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1)$$

donde $\ddot{\vec{R}} = a_o\hat{\imath}$, así que necesitamos pasarlo al SRNI

$$\Rightarrow \hat{\imath} = -\sin\theta\hat{\rho}' - \cos\theta\hat{\theta}' \;\wedge\; \hat{\jmath} = -\cos\theta\hat{\rho}' + \sin\theta\hat{\theta}'$$

Y las fuerzas reales actuando sobre la masa son: la tensión de la cuerda y el peso

$$m\vec{a} = -mg\hat{\jmath} - T\hat{\rho}'$$

$$= -mg(-\cos\theta\hat{\rho}' + \sin\theta\hat{\theta}') - T\hat{\rho}'$$

reemplazando en (1)

$$\Rightarrow m(-L\dot{\theta}^2\hat{\rho}' + L\ddot{\theta}\hat{\theta}') = mg\cos\theta\hat{\rho}' - mg\sin\theta\hat{\theta}' - T\hat{\rho}' - ma_o(-\sin\theta\hat{\rho}' - \cos\theta\hat{\theta}')$$

$$\hat{\rho}')\quad -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T + ma_o\sin\theta$$

$$\hat{\theta}')\quad mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + ma_o\cos\theta$$

Integramos $\hat{\theta}')$ $\Rightarrow mL\int_0^\theta \ddot{\theta}\,d\theta = -mg\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta + ma_o\int_0^\theta \cos\theta\,d\theta$

$$\Leftrightarrow \frac{mL\dot{\theta}^2}{2} = mg\cos\theta\Big|_0^\theta + ma_o\sin\theta\Big|_0^\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{mL\dot{\theta}^2}{2} = mg(\cos\theta - 1) + ma_o\sin\theta \quad (2)$$

El ángulo máximo lo tenemos para $\dot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow mg(\cos\theta^* - 1) + ma_o\sin\theta^* = 0$$

$$\Leftrightarrow mg\cos\theta^* + ma_o\sin\theta^* = mg$$

$$\Leftrightarrow -\cos\theta^* = \frac{a_o\sin\theta^*}{g} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta^* = \frac{a_o^2}{g^2}\sin^2\theta^* - \frac{2a_o\sin\theta^*}{g} + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - \sin^2\theta^* = \frac{a_o^2}{g^2}\sin^2\theta^* - \frac{2a_o}{g}\sin\theta^* + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sin^2\theta^*\left(\frac{a_o^2}{g^2} + 1\right) - \frac{2a_o\sin\theta^*}{g}$$

$$0 = \sin\theta^*\left(\sin\theta^*\left(\frac{a_o^2}{g^2} + 1\right) - \frac{2a_o}{g}\right) \quad / \text{no consideramos } \theta^* = 0 \text{ (C.I.)}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_o}{g} = \sin\theta^*\left(\frac{a_o^2}{g^2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta^* = \arcsin\left(\frac{2a_o}{g}\left(\frac{a_o^2}{g^2} + 1\right)^{-1}\right)$$

b) De $\hat{\rho}')$ despejamos la tensión $\Rightarrow T = mL\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + ma_o\sin\theta$, donde podemos usar $\dot{\theta}(\theta)$ de (2)

$$\Rightarrow T = mL\left(\frac{2g}{L}(\cos\theta - 1) + \frac{2a_0}{L}\sin\theta\right) + mg\cos\theta + ma_0\sin\theta$$

$$= -2mg + \cos\theta\,(2mg + mg) + \sin\theta\,(2ma_0 + ma_0)$$

$$= -2mg + 3mg\cos\theta + 3ma_0\sin\theta \quad (3)$$

y para encontrar el máximo de $T(\theta)$ derivamos c/r a θ e igualamos a 0

$$\Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = -3mg\sin\tilde{\theta} + 3ma_0\cos\tilde{\theta} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(\hat{\theta}) = \frac{g}{a} \Leftrightarrow \tilde{\theta} = \arctan\left(\frac{g}{a}\right)$$

donde $\hat{\theta}$ es el ángulo donde se maximiza T, reemplazamos en (3)

$$\Rightarrow T = -2mg + 3mg\cos\left(\arctan\left(\frac{g}{a_0}\right)\right) + 3ma_0\sin\left(\arctan\left(\frac{g}{a_0}\right)\right)$$

Recuerda que está la grabación de la clase!!