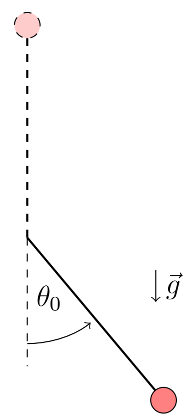
Auxiliar 7

Fuerzas restitutivas

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Calcule la velocidad inicial v_0 necesaria para que la masa en el péndulo alcance el punto máximo ($\theta = \pi$) cuando parte desde un ángulo θ_0 con respecto a la horizontal.



Respuesta

Este es un ejercicio introductorio de péndulos. Usamos coordenadas cilíndricas donde las fuerzas implicadas son: la tensión en $-\hat{\rho}$ y el peso que se descompone como $-mg\hat{k} = mg\cos\theta\hat{\rho} - mg\sin\theta\hat{\phi}$, por lo que haciendo segunda ley de Newton tenemos:

$$m((\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}) = -T\hat{\rho} + mg\cos\theta\hat{\rho} - mg\sin\theta\hat{\theta},$$

donde de le ecuación escalar de $\hat{\theta}$ podemos hacer trucazo de mecánica y usar integrales definidas,

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}d\dot{\theta} &= -g\sin\theta d\theta \\ \Rightarrow R\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} &= -g\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta \\ \Leftrightarrow \left.\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right|_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} &= \frac{g}{R}\cos\theta\bigg|_{\theta_0}^{\theta}, \end{aligned}$$

ahora imponemos que llegue justo ($\dot{\theta}_f = 0$) hasta arriba, $\theta_f = \pi$,

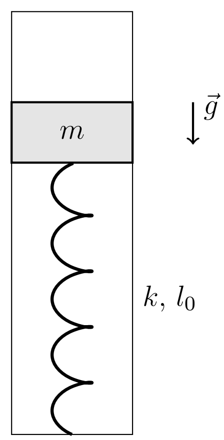
$$-\frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = -\frac{g}{R}\cos\theta_0$$
$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}\cos\theta_0},$$

y la velocidad tangencial se calcula como $v = R\dot{\theta}$,

$$v_0 = R\dot{\theta}_0 = \sqrt{2gR\cos\theta_0}$$

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ La masa m se libera, dentro de un tubo sin roce, desde el reposo cuando el resorte está en su largo natural l_0, responder:

1. ¿Cuál es la compresión máxima que alcanza el resorte?
2. ¿Cuál es la máxima velocidad de m?



Respuesta

Solo tenemos movimiento en un eje, que lo definimos como $\hat{k}$. Tenemos la fuerza del resorte $F = -k\Delta x$ y la fuerza peso, por lo que nuestra ecuación de movimiento sería:

$$m\ddot{z} = -k(z - l_0) - mg,$$

donde podemos integrar ocupando trucazo de mecánica y utilizando que el movimiento comienza desde el reposo, $\dot{z}_0 = 0$, en la altura $z_0 = l_0$,

$$m\int_0^{\dot{z}} \dot{z}d\dot{z} = (kl_0 - mg)\int_{l_0}^{z} dz - k\int_{l_0}^{z} zdz$$
$$\Leftrightarrow m\frac{\dot{z}^2}{2} = (kl_0 - mg)(z - l_0) - \frac{k}{2}(z^2 - l_0^2).$$

El resorte alcanza su máxima compresión cuando la masa deja de bajar, o sea, $\dot{z}_f = 0$, imponemos esto en la expresión encontrada para $\dot{z}$,

$$
\begin{aligned}
(kl_0 - mg)(z_f - l_0) - \frac{k}{2}(z_f^2 - l_0^2) = 0 \\
\Leftrightarrow -\frac{k}{2}z_f^2 + (kl_0 - mg)z_f - l_0(kl_0 - mg) + \frac{kl_0^2}{2} = 0 \\
\Rightarrow az_f^2 + bz_f + c = 0,
\end{aligned}
$$

que es una ecuación cuadrática con solución de la forma:

$$z_{f1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde tenemos dos soluciones: una será la altura inicial y la otra el punto más bajo que alcanza la masa, que es lo que buscamos.

Para saber la velocidad máxima imponemos que la aceleración sea 0, $\ddot{z} = 0$, por lo que ocupamos la primera ecuación para encontrar la altura donde pasa esto,

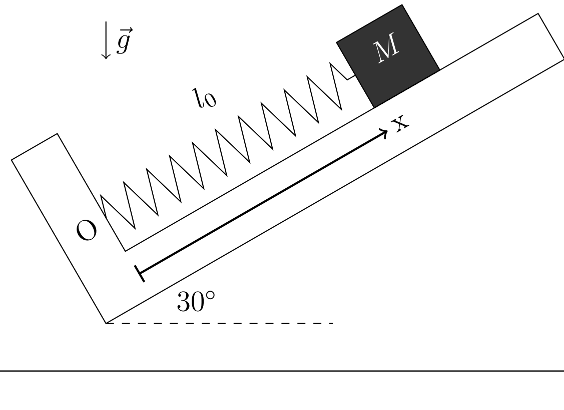
$$
\begin{aligned}
-k(z_{vmáx} - l_0) - mg = 0 \\
\Leftrightarrow z_{vmáx} = l_0 - \frac{mg}{k},
\end{aligned}
$$

luego esta expresión la reemplazamos en la expresión que encontramos de la velocidad en función de la altura, $\dot{z}(z)$.

P3.-

Un bloque puntual de masa M se encuentra sobre una superficie inclinada con un ángulo $\alpha = 30°$ respecto de la horizontal y ligado mediante un resorte ideal de largo natural l_0 a un punto fijo O.

1. Sin considerar roce, se observa que el bloque se mantiene en reposo en $x = l_0/2$. Determine el valor de la constante elástica del resorte en función de los datos del problema.
2. Ahora, considerando un roce estático entre el bloque y la superficie con coeficiente $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, determine el rango de la coordenada x en el que el bloque se mantiene quieto.
3. Considerando roce cinético μ_c, si en $t = 0$ el bloque se libera desde $x = 0$, determine el tiempo T en el que el bloque se detiene por primera vez, ¿este tiempo depende del roce con la superficie?



Respuesta

Utilizando un sistema de coordenadas cartesiano inclinado y con origen en el punto O, obtenemos que para que el bloque esté en reposo se debe igualar la fuerza del resorte con la de la gravedad en el eje x,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\Big|_{x=l_0/2} &= F_r - mg\sin\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow -k\left(\frac{l_0}{2} - l_0\right) &= mg\sin\alpha \\ \Leftrightarrow k = \frac{2mg\sin\alpha}{l_0} &= \frac{mg}{l_0}, \end{aligned}$$

donde $\sin 30° = 1/2$ y $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, con lo que conseguimos la constante elástica de nuestro resorte.

Ahora, sabemos que la fuerza del roce estático varía según la fuerza que se le aplique a la masa, pero tiene un límite superior igual a μN, con N la fuerza normal aplicada sobre la masa. Como no hay movimiento en el eje y, sabemos que la normal es igual a la componente del peso en este eje $N = mg\cos\alpha = \sqrt{3}mg/2$. Así que ahora tenemos 3 fuerzas en el eje x, entonces la suma (en valor absoluto, ya que nos interesa la magnitud) de la fuerza del resorte y de la componente del peso debe ser menor a μN para encontrar el rango de la coordenada x,

$$\begin{gathered} |F_r - mg\sin\alpha| \leq \mu N \\ \Leftrightarrow |-k(x-l_0) - mg\sin\alpha| \leq \mu mg\cos\alpha \\ \Leftrightarrow \left|-\frac{mg}{l_0}(x-l_0) - \frac{mg}{2}\right| \leq \frac{mg}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{mg}{l_0}\left|x - \frac{l_0}{2}\right| \leq \frac{mg}{4} \\ \Leftrightarrow \left|x - \frac{l_0}{2}\right| \leq \frac{l_0}{4} \\ \Rightarrow \frac{l_0}{4} \leq x \leq \frac{3l_0}{4} \end{gathered}$$

Para el último ítem escribimos la ecuación de movimiento en el eje x:

$$m\ddot{x} = -k(x-l_0) - \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\mu_c,$$

que es una EDO de la forma $m\ddot{x} = -Ax + B$, con A y B constantes, por lo que la *frecuencia angular* es la misma que si no tuviese la constante B, o sea, como el problema $m\ddot{x} = -k(x-l_0)$, donde la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/m}$. La masa intenta seguir un movimiento armónico simple, por lo que la primera vez que para es a la mitad del periodo P,

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

por lo tanto, este tiempo no depende de la constante de fricción cinemático, en lo que si influye es en la posición a la que llega, que es menor mientrar mayor sea μ_c.