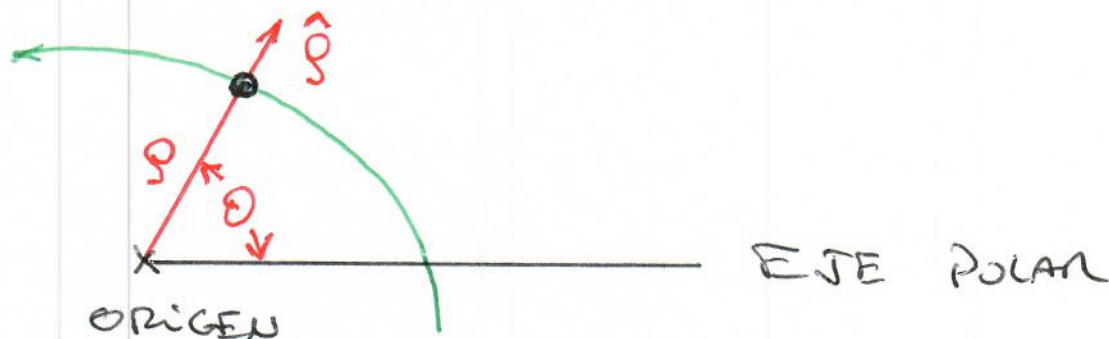


- COORDENADAS POLARES
VÁLIDAS PARA MOVIMIENTO EN UN PLANO



(ρ, θ) PERMITEN DETERMINAR SIN AMBIGÜEDAD
LA POSICIÓN DE LA PARTÍCULA

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho}$$

VELOCIDAD : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

LA DIRECCIÓN DE $\hat{\rho}$ DEPENDE ESTRUCTURALMENTE
DEL ÁNGULO θ Y ESTE DEPENDE DEL
TIEMPO t

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

SE DENOMINA VELOCIDAD ANGULAR

ANALIZAMOS

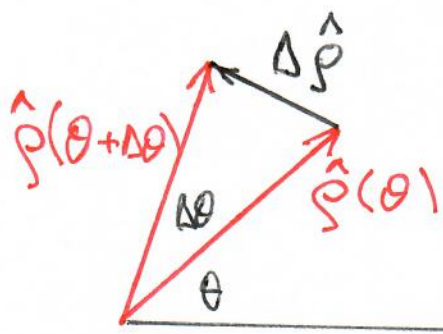
$$\frac{d\hat{p}}{d\theta}$$

$$\hat{p} \cdot \hat{p} = 1 \rightarrow \frac{d(\hat{p} \cdot \hat{p})}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d\hat{p}}{d\theta} \cdot \hat{p} + \hat{p} \cdot \frac{d\hat{p}}{d\theta} = 0 \rightarrow \hat{p} \cdot \frac{d\hat{p}}{d\theta} = 0$$

CONCLUSIÓN: $\left| \frac{d\hat{p}}{d\theta} \perp \hat{p} \right|$

$$\frac{d\hat{p}}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\hat{p}(\theta + \Delta\theta) - \hat{p}(\theta)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{p}}{\Delta\theta}$$



$$\left| \frac{d\hat{p}}{d\theta} \right| = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{|\Delta\hat{p}|}{\Delta\theta}$$



RECORDAR QUE

$$\left| \Delta s = R \Delta\theta \right|$$

EN EL LÍMITE CUANDO $\Delta\theta \rightarrow 0$

$|\Delta \hat{p}|$ SE APROXIMA A Δs EN UN
CÍRCULO DE RADIO $R=1$ $|\hat{p}| \equiv 1$

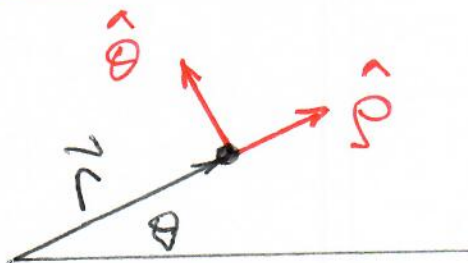
$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} |\Delta \hat{p}| = 1 \cdot \Delta\theta$$

$$\left| \frac{d\hat{p}}{d\theta} \right| = 1$$

LA DIRECCIÓN ESTÁ DADA POR UN
VECTOR UNITARIO $\hat{\theta} \perp \hat{p}$ EN LA
DIRECCIÓN CRECIENTE DE θ

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{d\hat{p}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{p} \hat{p} + p \dot{\theta} \hat{\theta}}$$



ACCELERACIÓN

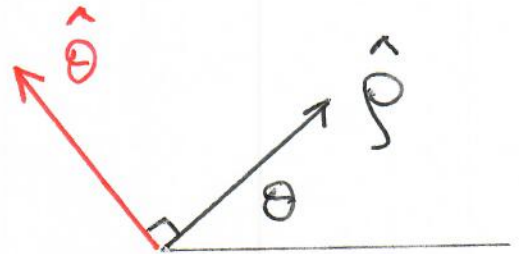
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta})$$

$$= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{\rho} \ddot{\theta} \hat{\theta} + \rho \ddot{\theta} \hat{\theta} + \rho \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$\downarrow$ $\hat{\theta}$ $\hat{\theta}$
 $\downarrow$?

$\hat{\theta}$ DEPENDE DE θ Y ESTE DEL TIEMPO

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$



$\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ CAMBIAN DE DIRECCIÓN
EN FORMA SOLIDARIA MANTENIENDO UN
ÁNGULO $\pi/2$ ENTRE ELLOS.

POR SIMPLE SIMETRÍA SE PUEDE
CONCLUIR QUE SI

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta} \rightarrow \left| \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\rho} \right|$$

(5)

$$\vec{a} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta} \hat{\theta}) + \dot{r}\dot{\theta} \hat{\theta} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \hat{r})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

TRAYECTORIA

CURVA EN EL ESPACIO DEFINIDA POR UNA FUNCIÓN $f(r, \theta) = 0$

EJEMPLO

ECUACIÓN LA TRAYECTORIA DE UNA PARTICULA QUE SE ALEJA DEL ORIGEN SEGÚN $\varphi = at$ MANTENIENDO UNA VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE $\dot{\theta} = \omega_0$

$$\varphi = at$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$$

SI ASUMIMOS QUE PARA $t=0$ $\theta=0$

$$d\theta = \omega_0 dt \rightarrow \theta = \omega_0 t$$

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{a}{\omega_0} \rightarrow \underbrace{\varphi - \frac{a}{\omega_0} \theta}_{f(r, \theta)} = 0$$

(6)

RADIO DE CURVATURA

$$R_c = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} \rightarrow v = [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2]^{1/2}$$

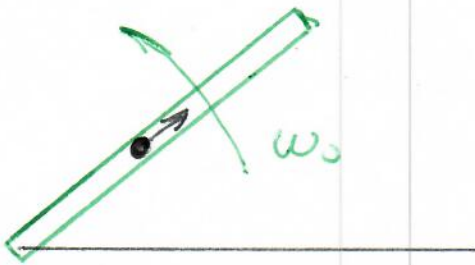
$$|\vec{a} \times \vec{v}| = |[(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \hat{\theta}] \times [\dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}]|$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \rho \dot{\theta} \hat{r} \times \hat{\theta} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \dot{\rho} \hat{\theta} \times \hat{r}$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = |\rho \dot{\theta} (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) - \dot{\rho} (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta})|$$

$$R_c = \frac{[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2]^{3/2}}{|\rho \dot{\theta} (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) - \dot{\rho} (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta})|} \quad (*)$$

EJ.

TUBO GIRA CON ω_0 cte

PARTÍCULA SE ALEJA CON

 $\dot{\rho} = a$ cte $t=0$ $\rho=0$ $\theta=0$

$$\dot{\rho} = a \quad \dot{\theta} = \omega_0$$

$$\ddot{\rho} = 0 \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\rho = at$$

$$R_c = \frac{a(1 + \omega_0^2 t^2)^{3/2}}{\omega_0(2 + \omega_0^2 t^2)}$$

UNA APROXIMACIÓN ALTERNATIVA CUANDO ⑦
SE CONOCE LA TRAYECTORIA...

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right) \dot{\theta} + \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \ddot{\theta}$$

REEMPLAZANDO $\dot{\mathbf{r}}$ Y $\ddot{\mathbf{r}}$ EN (*)

$$R_c = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| r \frac{d^2r}{d\theta^2} - 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r^2 \right|} \quad \text{! VERIFICAR!}$$

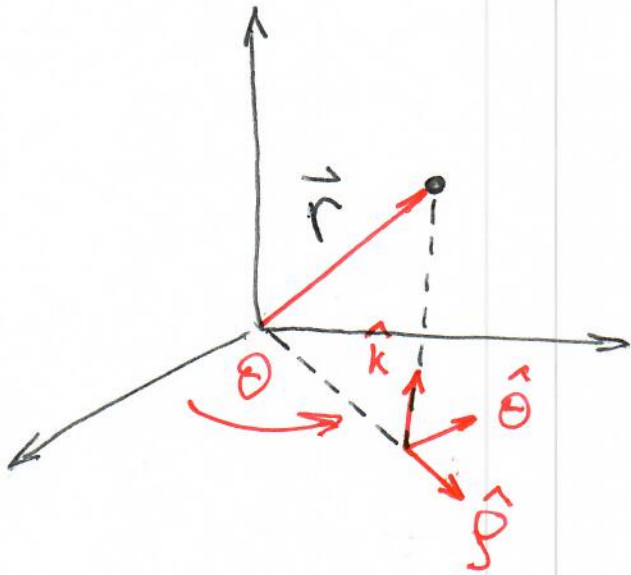
EJERCICIO PROPUESTO

DEMUESTRE QUE EL RADIO DE CURVATURA
EN EL PUNTO (x_0, y_0) DE UNA CURVA

$y = f(x)$ ESTÁ DADO POR

$$R_c = \frac{\left[1 + \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0}}$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS



$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}$$

VELOCIDAD

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k}$$