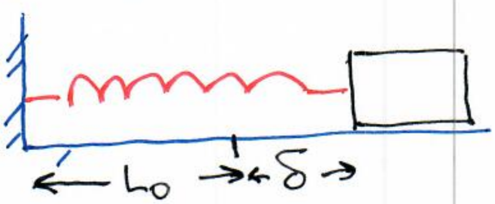
FI 2001 MECÁNICA S.8 P. ACEITUNO 15/04/21

FUERZAS DE RESTITUCIÓN

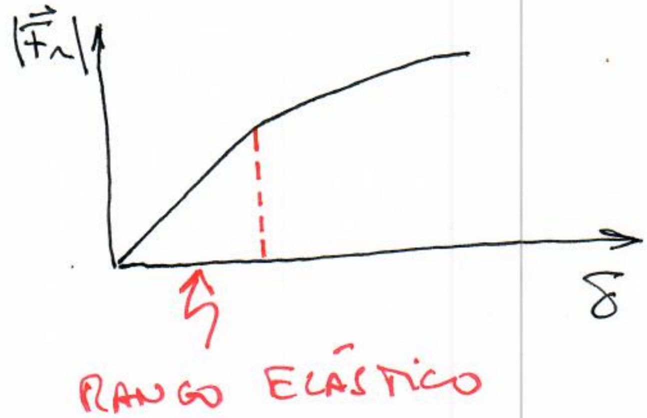
SON FUERZAS QUE TIENDEN A MANTENER LOS CUERPOS EN UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO. LA MAGNITUD DE LA FUERZA AUMENTA MIENTRAS MÁS SE ALEJA EL CUERPO DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

RESORTE

ELEMENTO MECÁNICO QUE EJERCE UNA FUERZA PROPORCIONAL A SU DEFORMACIÓN, CUANDO SE EXTIENDE O SE COMPRIME C/R A SU LARGO NATURAL. (L_o)

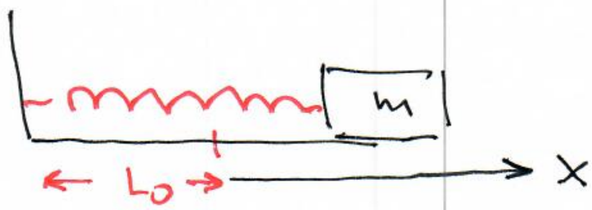


$$|\vec{F}_r| \propto \delta$$



CUANDO EL RESORTE ES OBLIGADO A EXTENDERSE MÁS ALLÁ DEL RANGO ELÁSTICO LA RELACIÓN ENTRE $|\vec{F}_r|$ Y δ ES NO-LINEAL Y EL RESORTE NO RECUPERA SU LARGO NATURAL

EJEMPLO SIMPLE : MOVIMIENTO LINEAL



$$m\vec{a} = \vec{F}_r = -kx$$

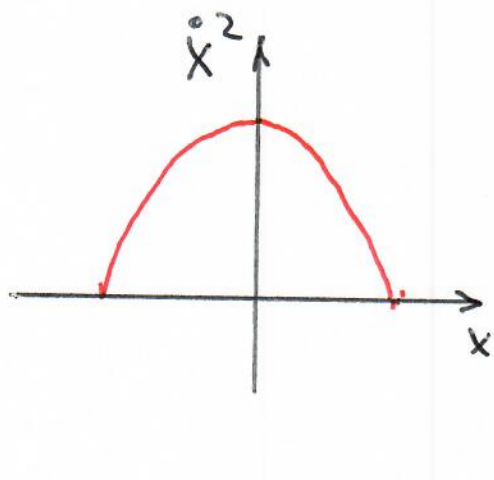
C.I.: $\quad t=0 \quad x = x_0 \quad \dot{x} = V_0$

$$m\ddot{x} = -kx \quad \longrightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dx}\,\dot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\int_{V_0}^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} = -\frac{k}{m}\int_{x_0}^{x} x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}V_0^2 = \frac{k}{2m}x_0^2 - \frac{k}{2m}x^2$$

$$\dot{x}^2 = \underbrace{V_0^2 + \frac{k}{m}x_0^2}_{D^2} - \frac{k}{m}x^2 = D^2 - \frac{k}{m}x^2$$



$x=0 \quad \boxed{\dot{x} = \pm D}$

VELOCIDAD CUANDO EL RESORTE RECUPERA SU LARGO NATURAL

$\dot{x}=0 \quad \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\,D}$

MÁX. ELONGACIÓN O COMPRESIÓN DEL RESORTE

$$\frac{dx}{dt} = \Big[D^2 - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x^2\Big]^{1/2}$$

$$\frac{dx}{\left[D^2 - \omega_0^2 x^2\right]^{1/2}} = dt \quad \xrightarrow{U = \omega_0 x} \quad \int_{\omega_0 x_0}^{\omega_0 x} \frac{du}{\left[D^2 - U^2\right]^{1/2}} = \int \omega_0 \, dt$$

$$\int \frac{du}{\left[D^2 - U^2\right]^{1/2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{D}\right)$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\omega_0 x}{D}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\omega_0 x_0}{D}\right) = \omega_0 t$$

$$\frac{\omega_0 x}{D} = \operatorname{sen}\Big(\omega_0 t + \underbrace{\operatorname{arcsen}\left(\frac{\omega_0 x_0}{D}\right)}_{\phi}\Big)$$

$$\boxed{x = \frac{D}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)}$$

METODOLOGÍA ALTERNATIVA DE SOLUCIÓN

$* \quad m\ddot{x} = -kx \quad \longrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (M.A.S)

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

$\operatorname{sen} \omega_0 t$ ES SOLUCIÓN DE $*$

$\cos \omega_0 t$ ES SOLUCIÓN DE $*$

$\therefore \quad x(t) = A \,\text{sen}\, \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

ES UNA SOLUCIÓN GENERAL

A y B SE DETERMINAN DE LAS COND. INICIALES

$t=0 \qquad x = x_0 = B$

$$\dot{x} = \omega_0 A \cos \omega_0 t - \omega_0 B \,\text{sen}\, \omega_0 t$$

$t=0 \qquad v_0 = \omega_0 A$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \,\text{sen}\, \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$$

$$x(t) = D \,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

$$= D \,\text{sen}\, \omega_0 t \cos\phi + D \cos \omega_0 t \,\text{sen}\, \phi$$

$$D \cos\phi = \frac{v_0}{\omega_0} \qquad D \,\text{sen}\phi = x_0$$

$$\boxed{D^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{tg}\, \phi = \frac{x_0}{v_0/\omega_0} = \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \rightarrow \boxed{\phi = \text{arctg}\left(\frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right)}$$

Solución

$$X = \frac{D}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

$$x(t) = X_{MAX} \operatorname{Sen}(\omega_0 t + \phi)$$

AMPLITUD DE LA OSCILACIÓN

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{FRECUENCIA ANGULAR}$$

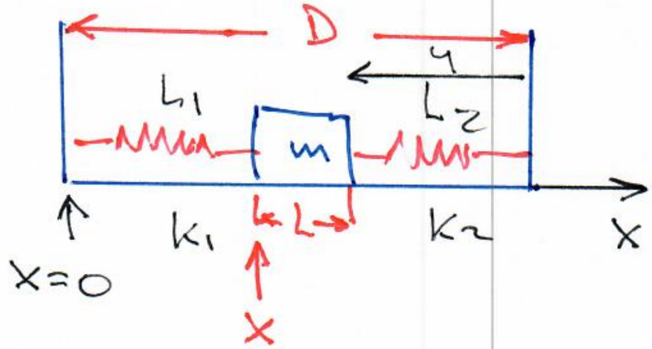
PERIODO DE LA OSCILACIÓN

$$x(t+T) = X_{MAX} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{T}(t+T) + \phi\right]$$

$$= X_{MAX} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{T} t + \phi + 2\pi\right]$$

$$\boxed{x(t+T) = x(t)}$$

APLICACIÓN



EN LA DIRECCIÓN HORIZONTAL

$$m\vec{a} = \vec{F}_{r_1} + \vec{F}_{r_2}$$

$\hat{i}$) $\vec{F}_{r1} = -k_1(x - L_1)\,\hat{i}$

$\hat{j}$) $\vec{F}_{r2} = -k_2(y - L_2)\,\hat{j}$

EN LA DIRECCION $\hat{i}$ $\vec{F}_{r2} = +k_2(y - L_2)\,\hat{i}$

$$y = D - L - x$$

$$m\ddot{x} = -k_1(x - L_1) + k_2(D - L - x - L_2)$$

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + \underbrace{k_1 L_1 + k_2 D - k_2 L - k_2 L_2}_{C}$$

$$m\ddot{x} + kx = C \qquad k = k_1 + k_2$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \frac{C}{m}$$

SOL. EC. HOMOGÉNEA $\quad x_h(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

SOL. EC. PARTICULAR $\quad x_p = \dfrac{C}{k}$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{C}{k}}$$

A y ϕ SE DETERMINAN SEGUN LAS CONDICIONES INICIALES

$t = 0 \quad x = x_0 \qquad x_0 = A\cos\phi + \dfrac{C}{k}$

$t=0 \quad \dot{x}=v_0 \qquad v_0 = -A\,\omega_0 \,\mathrm{sen}\,\phi$

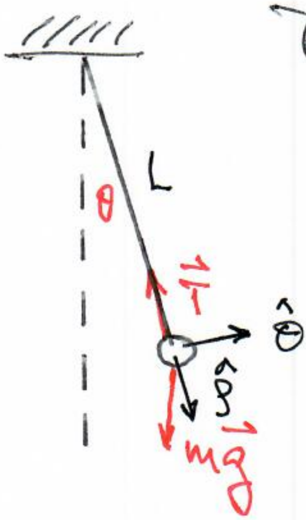
$$\left(x_0-\frac{C}{K}\right)^2+\left(-\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = A^2$$

$$\mathrm{tg}\,\phi = -\frac{v_0}{\omega_0}\,\frac{1}{\left(x_0-\frac{C}{K}\right)}$$

EL BLOQUE OSCILA ARMÓNICAMENTE CON AMPLITUD A ALREDEDOR DEL PUNTO

$$x^* = \frac{C}{K} = \frac{k_1L_1+k_2(D-L-L_2)}{K_1+K_2}$$

PÉNDULO SIMPLE



$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho}+\left(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\rho = L \rightarrow \dot{\rho}=\ddot{\rho}=0$$

$$\hat{\rho}) \quad -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

$$\hat{\theta}) \quad mL\ddot{\theta} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

C.I $\quad t=0 \quad \theta=\theta_0$

$$v_0 = R\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{L}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta \rightarrow \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g}{L}\int_{\theta_0}^{\theta} -\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\Big|_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{L}\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{g}{L}\cos\theta - \frac{g}{L}\cos\theta_0$$

$$A = \dot{\theta}_0^2 - \frac{g}{L}\cos\theta_0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left[A + \frac{g}{L}\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left[A + \frac{g}{L}\cos\theta\right]^{1/2}} = \int dt = t$$

$\downarrow$

NO TIENE SOLUCIÓN ANALÍTICA !!

★ CASO PARTICULAR θ PEQUEÑO

$$\operatorname{sen}\theta = \underbrace{\operatorname{sen}\theta\Big|_{\theta=0}}_{=0} + \underbrace{\cos\theta\Big|_{\theta=0}}_{=1}\theta - \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{sen}\theta\Big|_{\theta=0}}_{=0}\theta^2 + \dots$$

$$\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

EC. DEL PÉNDULO

M.A.S

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega_0^2}\theta = 0}$$

SOLUCIÓN

$$\theta(t) = A\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

A y ϕ SE DETERMINAN A PARTIR DE LAS CONDICIONES INICIALES

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= A\operatorname{sen}\phi \\ \frac{v_0}{L} &= A\omega_0\cos\phi \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \theta_0^2 + \left(\frac{v_0}{L}\right)^2 &= \underline{\underline{A^2}} \\ \underline{\underline{\operatorname{tg}\phi}} &= \frac{\theta_0 L}{v_0} \end{aligned}$$