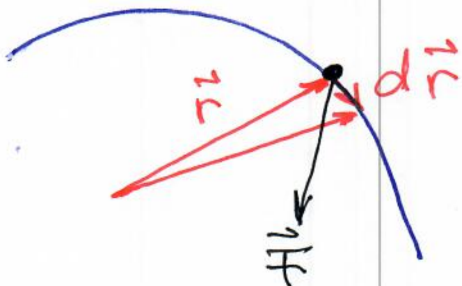
CONCEPTO DE TRABAJO Y ENERGÍA

$$m\vec{a} = \vec{F} \;/\cdot \vec{v} \quad \longrightarrow \quad m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} m\,\vec{v}\cdot\vec{v}}_{K=\frac{1}{2}mv^2}\Big) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ENERGÍA CINÉTICA

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \longrightarrow \quad dK = \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{dW}$$

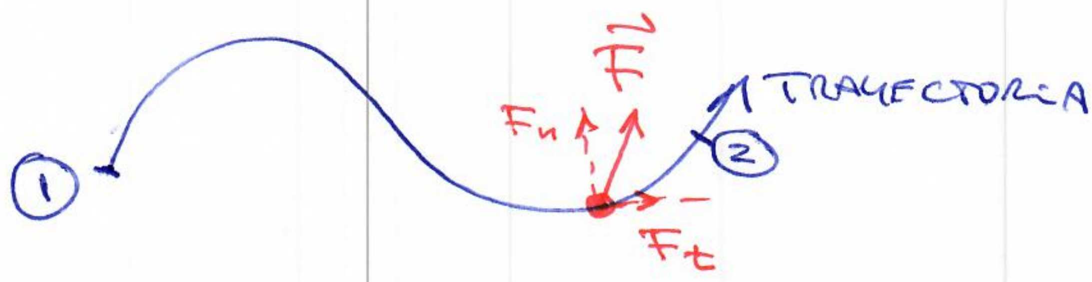


$\vec{F}\cdot d\vec{r}$: TRABAJO QUE LA FUERZA NETA $\vec{F}$ REALIZA AL DESPLAZARSE LA PARTÍCULA ENTRE $\vec{r}$ Y $\vec{r}+d\vec{r}$

COOR. NATURALES $\quad \vec{F} = F_t\,\hat{t} + F_n\,\hat{n}$

$$d\vec{r} = ds\,\hat{t}$$

$$\boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_t\,ds}$$



$$dK = F_t \cdot ds$$

$$\int_{K_0}^{K} dK = \int_{S_1}^{S_2} F_t \cdot ds$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \underbrace{\int_{S_1}^{S_2} F_t \cdot ds}_{W = \text{TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA NETA}}$$

SI ENTRE ~~DOS~~ PUNTOS S_1 Y S_2 LA RAPIDEZ DE LA PARTÍCULA AUMENTA $W > 0$

SI V ES MENOR EN S_2 $W < 0$

S_i $V_{S_1} = V_{S_2} \rightarrow W = 0$

UNIDADES : $dW = F_t ds \rightarrow [W] = N \cdot m$

$1 \, N \cdot m \equiv 1$ JOULE

UNIDADES DE K $[K] = kg \, m^2 s^{-2}$

$= kg \, m s^{-2} \cdot m = N \cdot m$

POTENCIA MECÁNICA

$$P = \frac{dW}{dt}$$

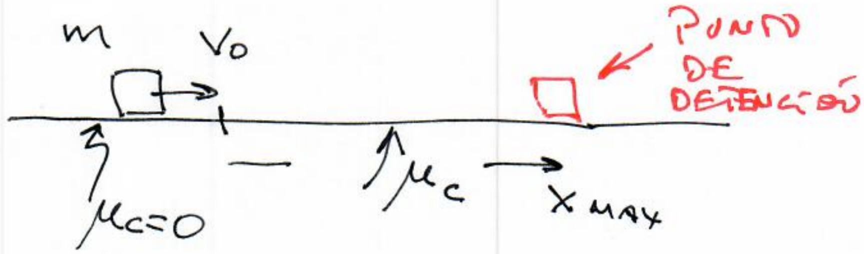
MIDE LA EFICIENCIA COMO UNA FUERZA REALIZA UN CIERTO TRABAJO

UNIDADES $\quad [P] = \frac{\text{JOULES}}{\text{SEG}} = \text{WATT}$

COMO $\quad dK = dW$

$$\boxed{P = \frac{dK}{dt}}$$

EJEMPLO



¿QUÉ DISTANCIA RECORRE EL BLOQUE DE MASA M SOBRE LA SUPERFICIE CON ROCE CINÉTICO?

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^{x_{MAX}} -\mu_c N \, \hat{i} \cdot dx \, \hat{i}$$

$$= -\mu_c m g \, x_{MAX}$$

$$\boxed{x_{MAX} = \frac{V_0^2}{2 \mu_c g}}$$

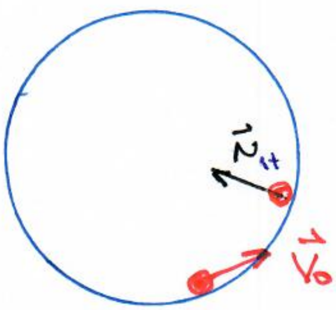
EJEMPLO

* TRABAJO ASOCIADO A UNA FUERZA CONSTANTE $\vec{F}_0$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$= \vec{F}_0 \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

* EJEMPLO



PARTÍCULA SE MUEVE EN LA BASE DE UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON VELOCIDAD INICIAL $\vec{V}_0$ A LO LARGO DE LA PARED

$$\vec{F} = \underbrace{M\vec{g} + \vec{N}_V}_{=0} + \vec{N}_H$$

$\vec{N}_H$ ES PERPENDICULAR A LA TRAYECTORIA

$\therefore \ \vec{N}_H \cdot d\vec{r} = 0$ SIEMPRE

$\therefore \ dK = 0 \rightarrow$ LA RAPIDEZ NO CAMBIA (ES V_0)

EN GENERAL $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$

$$\Delta K = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots$$

★ FUERZAS CONSERVATIVAS

SON AQUELLAS EN LAS QUE

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$$

DONDE $V(x,y,z)$ ES UNA FUNCIÓN ESCALAR QUE SE DENOMINA POTENCIAL O FUNCIÓN DE POTENCIAL

EJEMPLO $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{k}$

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg\,dz = -dV$$

$$dV = mg\,dz \rightarrow \boxed{V = mgz + C}$$

POTENCIAL GRAVITATORIO

$$\vec{F} = -k(x - L_0)\,\hat{i}$$ (MOVIMIENTO LINEAL)

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -k(x-L_0)\,\hat{i} \cdot dx\,\hat{i}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -k(x-L_0)\,dx = -dV$$

⑤

$$dV = k(x-L_0)\,dx$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k(x-L_0)^2 + C}$$

POTENCIAL DEL RESORTE

COMO $V(x,y,z) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Si $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{F} = -\nabla V}$$

$$\nabla \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\right]\hat{k}$$

"OPERADOR NABLA"

EN EL CASO DE UNA FUERZA CONSERVATIVA

$$dK = dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$$

SI UNA PARTÍCULA SE MUEVE ENTRE DOS POSICIONES POR LA ACCION DE UNA FUERZA CONSERVATIVA

VÁLIDO EN TODO EL RECORRIDO!

$$dK + dV = 0 \Rightarrow d(K+V) = 0$$

$$\boxed{K + V = E}$$ (ENERGÍA MECÁNICA TOTAL)

¡SE MANTIENE CONSTANTE!

★ GRAN CONCLUSIÓN

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x,y,z) = E_0 \quad (\text{CONSTANTE})$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

PROPIEDAD DE UNA FUERZA CONSERVATIVA

$$\nabla \times \vec{F} \equiv 0 \qquad (\vec{F} \text{ ES IRROTACIONAL})$$

ROTOR DE $\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\hat{j} + $$

$$+ \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

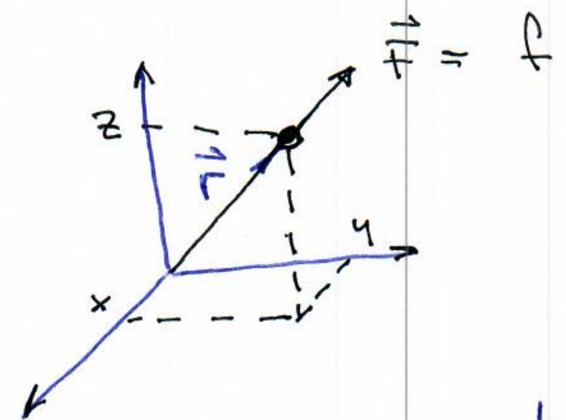
$$-\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0$$

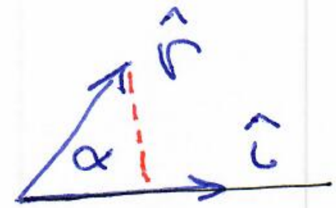
LOS DOS OTROS PARÉNTESIS TAMBIÉN SON NULOS.

$$\therefore \nabla \times \vec{F} = 0$$

★ CASO PARTICULAR FUERZA CENTRAL

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{r} \qquad \hat{r} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$





LA COMPONENTE DE $\hat{r}$ EN DIRECCIÓN $\hat{i}$ ES $\cos\alpha\,\hat{i}$

LA COMPONENTE DE $\vec{r}$ SEGÚN $\hat{i}$: $r\cos\alpha = x$

" " " $\hat{j} = r\cos\beta = y$

" " " $\hat{k} = r\cos\gamma = z$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \cos\beta = \frac{y}{r} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

$$\vec{F} = \overbrace{f(r)\frac{x}{r}}^{F_x}\,\hat{i} + \overbrace{f(r)\frac{y}{r}}^{F_y}\,\hat{j} + \overbrace{f(r)\frac{z}{r}}^{F_z}\,\hat{k}$$

DONDE $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

$$\nabla\times\vec{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{i} + [\quad]\,\hat{j} + [\quad]\,\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f(r)\frac{z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(f(r)\frac{y}{r}\right)\right]\hat{\imath} +$$

$$+ [A]\hat{\jmath} + [B]\hat{k}$$

$$* \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} y$$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\cdot 2y \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{1}{r} 2z$$

$$* \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)\left[\frac{1}{r}yz - \frac{1}{r}zy\right] \equiv 0$$

SE PUEDE DEMOSTRAR DE UN MODO SIMILAR QUE LOS TÉRMINOS A Y B SON TAMBIÉN NULOS

$$\therefore \quad \nabla \times \vec{F} \equiv 0$$

$$\vec{F} = -G\frac{M_T m}{r^2}\hat{r}$$ FUERZA GRAVITACIONAL

EN COORD. ESFÉRICAS

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{GM_T m}{r^2}dr = -dV_G$$

$$V_G = \int \frac{GM_T m}{r^2}dr = -\frac{GM_T m}{r} + C$$

$$V_G = -\frac{GM_T m}{r} + C$$

CONSTANTE ARBITRARIA