

FUERZA GRAVITACIONAL

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

ANÁLISIS DE TRAYECTORIA

EC. DE BINET

$$- m \left(\frac{l_0}{m} \right)^2 f^2 \left[\frac{d^2 f}{d\theta^2} + f \right] =$$

$$h = \frac{l_0}{m}$$

MOMENTUM ANGULAR
POR UNIDAD DE
MASA

$$= - GMm f^2$$

$$\left[\frac{d^2 f}{d\theta^2} + f \right] = \frac{GM}{h^2}$$

SOLUCIÓN:

$$f(\theta) = \frac{1}{p(\theta)} = \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \delta)$$

PARA DETERMINAR LAS CONSTANTES A y δ
SE REQUIERE CONOCER p_0 y $\frac{dp}{d\theta} \big|_{p_0}$ EN
UN CIERTO PUNTO DE LA TRAYECTORIA

(2)

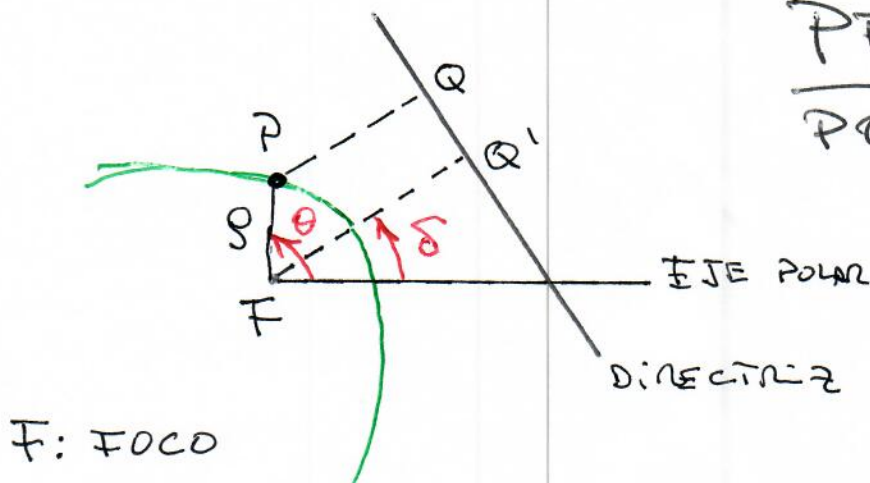
$$p = p_0 \quad \frac{1}{p_0} = \frac{GM}{h^2} + A \cos \delta$$

$$-\frac{1}{p_0^2} \frac{dp}{d\theta} \Big|_{\theta_0} = -A \sin(-\delta)$$

$$p(\theta) = \frac{1}{\frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \delta)}$$

$$p(\theta) = \frac{h^2}{GM} \frac{1}{1 + \frac{h^2}{GM} \cos(\theta - \delta)}$$

SECCIONES CÓNICAS



$$\frac{PF}{PQ} = e$$

EXCENTRICIDAD
DE LA SECCIÓN
CÓNICA

FQ' : DISTANCIA
ENTRE EL
FOCO Y LA
DIRECTRIZ (P)

$$\frac{p}{p - p \cos(\theta - \delta)} = e$$

$$p = pe - pe \cos(\theta - \delta)$$

$$p = \frac{pe}{1 + e \cos(\theta - \delta)}$$

EL PUNTO MÁS CERCANO DE LA SECCIÓN CÓNICA A LA DIRECTRIZ SE OBTIENE EN $\theta = \delta$

$$p_0 = \frac{pe}{1 + e} \rightarrow pe = p_0(1 + e)$$

DE MODO TAL QUE LA TRAYECTORIA SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$p(\theta) = p_0 \frac{1 + e}{1 + e \cos(\theta - \delta)}$$

LA ORIENTACIÓN DEL EJE POLAR ES ARBITRARIA DE MODO QUE SE PUEDE ELEGIR DE MODO DE $\delta = 0$

$$\rho(\theta) = \rho_0 \frac{1+e}{1+e \cos \theta}$$

a) $e=0$ ($\rho \rightarrow \infty$)

$$\rho(\theta) = \rho_0$$

SECCIÓN CÓNICA ES UN
CÍRCULO

b) $0 < e < 1$

DENOMINADOR $(1 + e \cos \theta) < 1$ (POSITIVO)

TIENE UN MÁXIMO $= 1+e$ $\theta=0$

" " MÍNIMO $= 1-e$ $\theta=\pi$

$$\rho_{\min} = \rho_0 \quad (\theta=0)$$

$$\rho_{\max} = \rho_0 \frac{1+e}{1-e} \quad (\theta=\pi)$$

LA EC. DE LA SECCIÓN CÓNICA
ES UNA ELIPSE

$$\rho = \frac{\rho_0(1+e)}{1+e \cos \theta}$$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$* \quad x^2 + y^2 = \rho^2 = \frac{\rho_0^2(1+e)^2}{(1+e \cos \theta)^2}$$

$$\frac{\rho_0(1+e)}{1+e \cos \theta} \cos \theta = x \rightarrow \rho_0(1+e) \cos \theta = x + x e \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho_0(1+e) - x e}$$

$$1 + e \cos \theta = 1 + \frac{e x}{\rho_0(1+e) - x e}$$

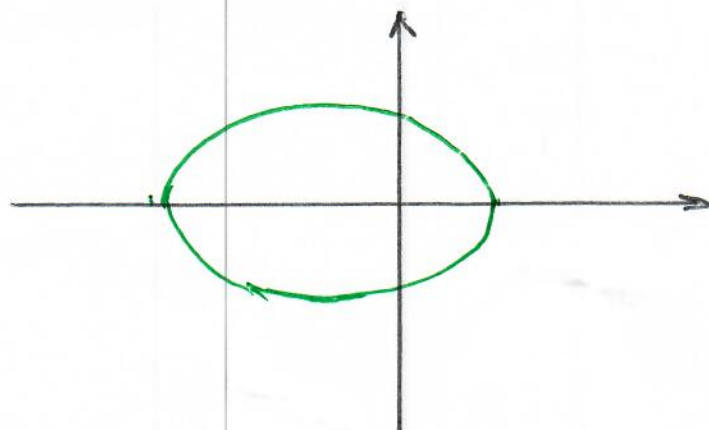
$$(1 + e \cos \theta)^2 = \frac{\rho_0^2(1+e)^2}{(\rho_0(1+e) - x e)^2}$$

$$* \quad x^2 + y^2 = \rho_0^2(1+e)^2 - 2e\rho_0(1+e)x + \underbrace{x^2 e^2}$$

$$\boxed{(1-e^2)x^2 + 2e\rho_0(1+e)x + y^2 = \rho_0^2(1+e)^2}$$

6

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



EN ESTE CASO

$$y_0 = 0$$

c) $e = 1$

$$\rho = \rho_0 \frac{1+e}{1+e \cos \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \rho = \infty$$

PARÁBOLA

d) $e > 1$

$$1 + e \cos \theta^* = 0 \rightarrow \theta^* = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta^*} \rho = \infty$$

HIPÉRBOLA

TRAYECTORIAS EN MOVIMIENTO BAJO LA ACCIÓN DE LA GRAVEDAD

(BINET)

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

$$-mh^2 \xi^2 \left[\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi \right] = F(\xi)$$

$$-mh^2 \xi^2 \left[\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi \right] = -GMm \xi^2$$

$$\left| \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM}{h^2} \right|$$

$$h = \frac{L_0}{m}$$

$$\xi(\theta) = \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \delta)$$

$$p(\theta) = \frac{h^2}{GM} \frac{1}{1 + \frac{Ah^2}{GM} \cos(\theta - \delta)}$$

SECCIÓN
CÓNICA

$$= p_0 \frac{1 + e}{1 + e \cos(\theta - \delta)}$$

$$p_0(1+e) = \frac{h^2}{GM}$$

$$\left| e = \frac{Ah^2}{GM} \right|$$

$$\left| p_0 = \frac{h^2}{GM(1+e)} \right|$$